

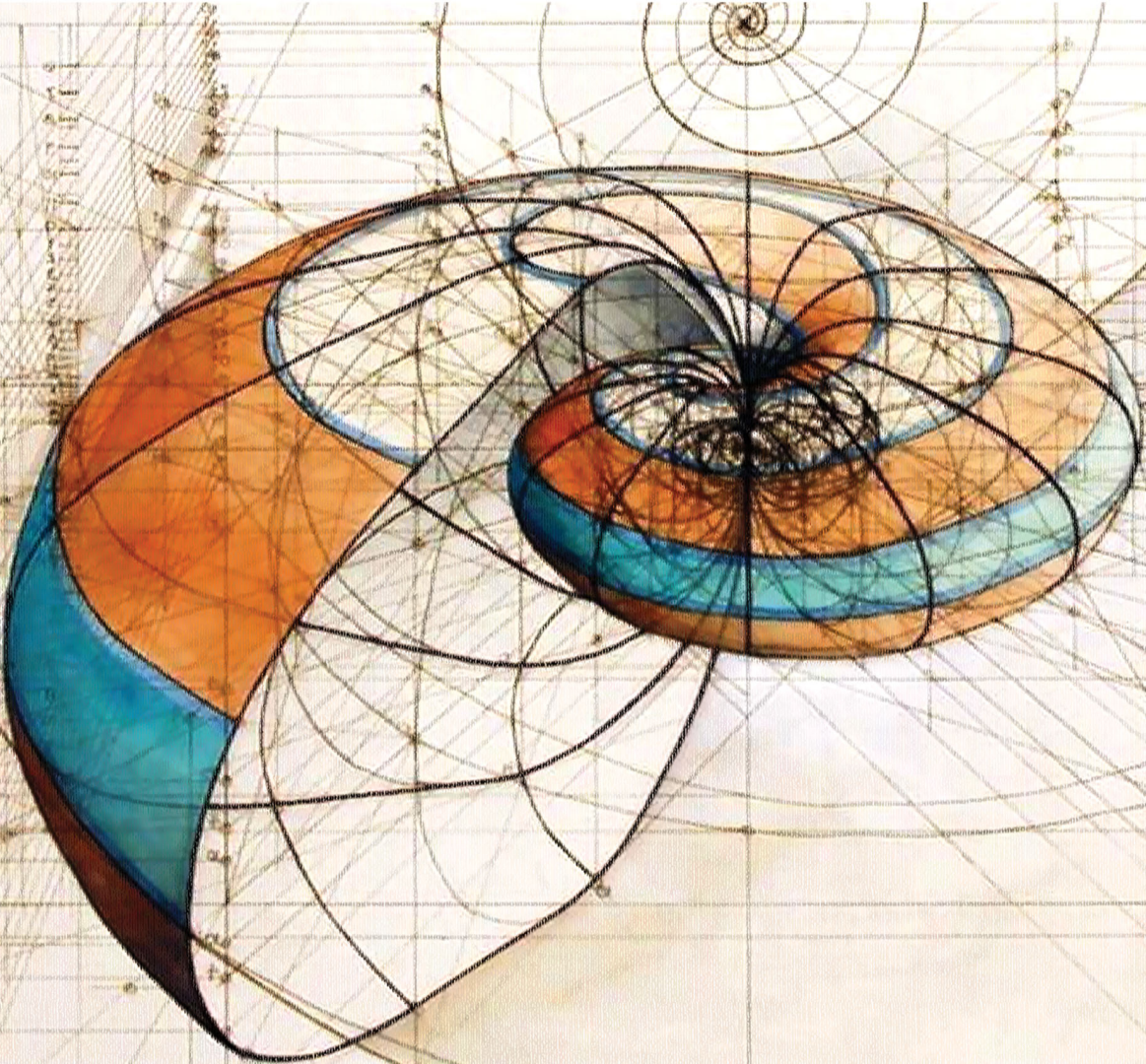


آموزش وقتست

m u l t i v i t a m i n

حسابان (۱)

kelk-m.com



به کلک: عباس امیدوار - حسنیہ شریفی

جبر و معادله



فصل

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱

معادلات درجه دوم

۲

معادلات گویا و گنگ

۳

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۴

آشنایی با هندسه تحلیلی

۵



درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱-۱- مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n

در لیگ برتر فوتبال ایران در سال ۱۳۹۵، ۱۶ تیم وجود داشت، در نیم فصل اول بازی‌ها، تعداد کل بازی‌های انجام شده چه تعداد است؟ می‌دانیم در این نیم فصل هر تیم ۱۵ بازی انجام داده است. برای آن که تعداد کل بازی‌ها را بشماریم. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

① تعداد بازی‌های تیم اول برابر چقدر است؟

② تعداد بازی‌های تیم دوم به جز بازی با تیم اول برابر چقدر است؟

③ تعداد بازی‌های تیم سوم به جز بازی با تیم‌های اول و دوم برابر چقدر است؟

$$۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + \dots + ۳ + ۲ + ۱$$

با ادامه روند فوق در می‌یابیم تعداد بازی‌های انجام شده برابر است با:

حال به نظرتان چگونه می‌توان مجموع فوق را بدست آورد.

بگذارید راه حل جالبی را برایتان پیشنهاد کنم، مجموع فوق را S در نظر بگیرید و آن را به دو صورت زیر بنویسید.

$$\begin{cases} S = ۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + \dots + ۳ + ۲ + ۱ \\ S = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ \\ ۲S = ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + \dots + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ = ۱۵ \times ۱۶ \\ S = ۱۵ \times ۸ = ۱۲۰ \end{cases}$$

از جمع دو تساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

پس:

بنابراین تعداد بازی‌ها، ۱۲۰ بازی بوده است.

به همین ترتیب می‌توان مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + ۲ + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$\rightarrow ۲S = n(n+1) \rightarrow S = \frac{n(n+1)}{۲}$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$

نتیجه

۱-۲- مجموع جملات دنباله حسابی

دنباله حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ را در نظر بگیرید. برای آن که مجموع جملات این دنباله را بدست آوریم جاهای خالی را پر کنید.

(۱): $a_1 = a_1$

(۲): $a_2 = a_1 + d$

(۳): $a_3 = \dots + ۲d$

(۴): $a_4 = \dots + \dots$

⋮

(n): $a_n = a_1 + (\dots - \dots)d$

اگر طرفین تساوی‌های بالا را باهم جمع کنیم، داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \dots a_1 + (\dots)d$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = na_1 + \dots d = \frac{n}{۲} (\dots + (n-1)\dots) \quad ; \quad ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{۲}$$

نتیجه

اگر در دنباله حسابی a_1, a_2, \dots, a_n مجموع n جمله اول را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

مثال ۱: هر یک از مجموع‌های زیر را بر حسب a_1 و d بنویسید.

الف $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{51} =$

ب $a_1 + a_2 + \dots + a_{36} =$

پاسخ:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{51} \stackrel{n=51}{=} \frac{51(2a_1 + (51-1)d)}{2} = \frac{51(2a_1 + 50d)}{2}$$

الف

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{36} \stackrel{n=36}{=} \frac{36(2a_1 + (36-1)d)}{2} = \frac{36(2a_1 + 35d)}{2}$$

ب

مثال ۲: جاهای خالی زیر را پر کنید.

۱) $S_{10} = \dots(2a_1 + \dots d)$

۲) $S_{13} = 13a_{\dots}$

۳) $2a_1 + 37d = \frac{1}{19} S_{\dots}$

۴) $a_5 = \frac{1}{9} S_{\dots}$

پاسخ:

۱) $S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)d) = 5(2a_1 + 9d)$

۲) $S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + (13-1)d) = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = \frac{13}{2} \times 2(a_1 + 6d) = 13(a_1 + 6d) \xrightarrow{a_7 = a_1 + 6d} S_{13} = 13a_7$

۳) $2a_1 + 37d = 2a_1 + (37-1)d = \frac{2}{38} \times \frac{38}{2}(2a_1 + (38-1)d) = \frac{2}{38}(\frac{38}{2}(2a_1 + (38-1)d)) = \frac{1}{19} S_{\dots}$

۴) $a_5 = (a_1 + 4d) = \frac{2}{2}(a_1 + 4d) = \frac{1}{2}(2a_1 + 8d) = \frac{1}{2}(2a_1 + (9-1)d) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}(2a_1 + (9-1)d)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}(2a_1 + (9-1)d) = \frac{1}{9} S_{\dots}$

مثال ۳: در دنباله $7, 9, 11, \dots$ مجموع بیست جمله اول دنباله را پیدا کنید.

پاسخ:

$a_2 = 9, a_1 = 7 \rightarrow a_2 - a_1 = 9 - 7 = 2$

$a_1 = 7, d = 2$

$a_3 = 11, a_2 = 9 \rightarrow a_3 - a_2 = 11 - 9 = 2$

$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 7 + (20-1) \times 2) = \dots(7 + 35) = \dots$

مثال ۴: در یک دنباله جمله اول ۴ و $a_{n+1} = a_n + 5$ ، مجموع ۸ جمله اول آن کدام است؟

۱۷۴ (۴)

۱۶۸ (۳)

۱۷۲ (۲)

۱۷۰ (۱)

پاسخ: با توجه به تساوی $a_{n+1} = a_n + 5$ واضح است که این دنباله حسابی است چون اگر به هر جمله ۵ واحد اضافه کنیم جمله بعدی

ساخته می‌شود و این یعنی $d = 5$ است.

$S_8 = \frac{8}{2}(2 \times 4 + (8-1) \times 5) = \dots(4 + 35) = \dots$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۵: در یک دنباله حسابی جملات پنجم و نهم به ترتیب ۱ و ۷ است. مجموع دوازده جمله اول آن را بیابید.

$$\begin{cases} a_5 = 1 \rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 1 \\ a_9 = 7 \rightarrow a_9 = \dots + \dots d = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a_1 = \dots, d = \dots$$

بیانیه:

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2 \times \dots + (12-1) \dots) = \dots (\dots + \dots) = \dots$$

مثال ۶: اگر به یک دنباله عددی ۲ واحد اضافه شود به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر اضافه می‌شود؟

بیانیه:

$$S_{20} = \dots (\dots + \dots)$$

$$S'_{20} = \dots (\dots + \dots)$$

$$\rightarrow S'_{20} - S_{20} = (\dots) - (\dots) = \dots$$

تکنه: در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = An^2 + Bn$ بدست می‌آید که در آن: جمله اول $A + B$ و قدرنسبت دنباله $d = 2A$ است.

مثال ۷: در دنباله حسابی $5, 7, 9, \dots$ مجموع n جمله اول را بیابید.

$$a_1 = 5, a_2 = 7 \rightarrow d = a_2 - a_1 = \dots$$

بیانیه:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2(5) + (n-1) \dots) \rightarrow S_n = \dots$$

مثال ۸: در دنباله حسابی $2, 6, 10, 14, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

بیانیه:

ابتدا مجموع n جمله اول این دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_1 = 2, a_2 = 6 \rightarrow d = a_2 - a_1 = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2 \times 2 + (n-1) \times 4) = \frac{n}{2} (4 + 4(n-1)) = \frac{n}{2} (4 + 4n - 4) = \frac{n}{2} (4n) = 2n^2$$

برای آن که بفهمیم حداقل چند جمله از این دنباله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود کافی است $S_n > 200$ قرار دهیم و حداقل مقدار n را بیابیم:

$$S_n > 200 \rightarrow 2n^2 > 200 \rightarrow n^2 > 100 \rightarrow n > 10$$

پس اگر حداقل ۱۱ جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم مجموع آن‌ها بیشتر از ۲۰۰ می‌شود.

تکنه: در هر دنباله اگر a_n جمله عمومی و S_n مجموع n جمله اول باشد. آن‌گاه:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

آن‌گاه:

مثال ۹: اگر در یک دنباله حسابی $S_n = n^2 - n$ باشد. جمله عمومی دنباله را بیابید.

بیانیه:

این سؤال را از دو روش به کمک هم حل می‌کنیم:

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$$

روش اول:

$$a_1 + a_2 = S_2 = 2^2 - 2 = 2 \xrightarrow{a_1=0} 0 + a_2 = 2 \rightarrow a_2 = 2$$

$$d = a_2 - a_1 = \dots \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = \dots$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n - ((n-1)^2 - (n-1)) = n^2 - n - (n^2 - 2n + 1 - n + 1) = \dots$$

روش دوم:

مثال ۱۰: جاهای خالی زیر را پر کنید.

$$a_9 + a_{10} + a_{11} = S_{\dots} - S_{\dots}$$

پاسخ: می‌دانیم که:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = S_{11} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8 = S_8 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم شود}} a_9 + a_{10} + a_{11} = S_{\dots} - S_{\dots}$$

مثال ۱۱: مجموع n جمله اول یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات دنباله با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

- ۹ (۱) $\frac{29}{3}$ (۲) $\frac{49}{3}$ (۳) ۱۸ (۴)

پاسخ: با توجه به مثال ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{17} + a_{18} = S_{18} - S_6 \rightarrow \begin{cases} S_{18} = \frac{18(18-15)}{6} = \frac{18 \times 3}{6} = 9 \\ S_6 = \frac{6(6-15)}{6} = \frac{-6 \times 9}{6} = -9 \end{cases}$$

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = 9 - (-9) = \dots\dots$$

بنابراین

پس گزینه صحیح است.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

تکنیک: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه روبه‌رو بدست می‌آید:

مثال ۱۲: جملات دنباله ۲, ۵, ۸, ..., ۱۴۹ را در نظر بگیرید.

ب مجموع جملات این دنباله را بدست آورید.

الف دنباله فوق چند جمله دارد؟

پاسخ:

الف می‌دانیم جمله اول $a_1 = 2$ و جمله آخر (شماره جمله را نمی‌دانیم) $a_n = 149$ و قدرنسبت این دنباله حسابی برابر $d = 3$ پس داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 149 = 2 + (n-1) \times 3 \rightarrow 149 = 2 + 3n - 3 \rightarrow 3n - 1 = 149 \rightarrow 3n = 150 \rightarrow n = 50$$

پس این دنباله ۵۰ جمله دارد.

$$S_{50} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{50}) = \dots\dots$$

ب

مثال ۱۳: جملات دنباله حسابی $-27, x, -21, \dots$ مفروض است.

ب این دنباله چند جمله منفی دارد؟

الف قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

ت مجموع جملات منفی را بیابید.

پ بزرگترین جمله منفی آن چقدر است؟

پاسخ:

$$a_1 = -27$$

$$a_3 = -21 \rightarrow a_3 = a_1 + 2d \rightarrow -27 + 2d = -21 \rightarrow 2d = 6 \rightarrow d = 3 \rightarrow$$

ب برای پیدا کردن تعداد جمله منفی، کافی است $a_n < 0$ در نظر بگیریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{\substack{a_1 = -27 \\ d = 3}} -27 + (n-1) \times 3 < 0 \rightarrow 3n - 3 < 27 \rightarrow 3n < 30 \rightarrow n < 10$$

۹ جمله منفی دارد

پ با توجه به قسمت ب واضح است که بزرگ‌ترین جمله منفی دنباله جمله نهم آن است.

$$a_9 = a_1 + 8d = \dots\dots\dots$$

$$S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = \dots\dots\dots$$

نکته: در یک دنباله حسابی با جمله اول a و جمله آخر b و قدرنسبت d ، تعداد جملات از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{b-a}{d} + 1$$

مثال ۱۴: هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف $A = \{a_3, a_5, a_7, \dots, a_{37}\}$

ب $B = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{42}\}$

پاسخ:

الف تعداد اعضای مجموعه A با تعداد اعضای دنباله $3, 5, 7, \dots, 37$ یکسان است و چون این دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ جمله آخر ۳۷ است. طبق نکته تعداد این جملات برابر است با:

$$n = \frac{37-3}{2} + 1 = \frac{34}{2} + 1 = 17 + 1 = 18$$

ب

مثال ۱۵: اگر a_1, a_2, a_3, \dots جملات یک دنباله حسابی باشند.

الف آیا دنباله $a_3, a_5, a_7, \dots, a_{47}$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند چرا؟

ب تعداد جملات بالا چقدر است؟

پ مجموع $a_3 + a_5 + \dots + a_{47}$ را بدست آورید.

ت مجموع $a_3 + a_5 + \dots + a_{47}$ را بر حسب S_{49} چقدر است؟

پاسخ:

الف بله، زیرا فاصله بین جملات یکسان است.

$$n = \frac{47-3}{2} + 1 = \frac{44}{2} + 1 = 22 + 1 = 23$$

ب جملات a_3, a_5, \dots, a_{47} یک دنباله حسابی است که جمله اول آن a_3 و تعداد آن ۲۳ تا و جمله آخر آن a_{47} است پس مجموع آن به صورت زیر بدست می‌آید.

$$S = \frac{23}{2}(a_3 + a_{47}) = \frac{23}{2}(a_1 + 2d + a_1 + 44d) \rightarrow S = \frac{23}{2}(2a_1 + 46d)$$

$$S = \frac{23}{2}(2a_1 + 46d) \quad (1)$$

ت در قسمت پ در محاسبه مقدار S به رابطه روبه‌رو رسیدیم:

$$S_{49} = \frac{49}{2}(2a_1 + 46d) \quad (2)$$

از طرفی داریم:

با تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲) داریم:

$$\frac{S}{S_{49}} = \frac{23}{49} \rightarrow S = \frac{23}{49} S_{49}$$

مثال ۱۶: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 + n$ است حاصل $a_1 + a_3 + \dots + a_{99}$ چقدر است؟

۲۵۰۰۰ (۴)

۹۹۰۰ (۳)

۲۵۰۰ (۲)

۵۰۰۰ (۱)

بیاسخ:

جملات دنباله a_1, a_3, \dots, a_{99} یک دنباله حسابی بوده با جمله اول a_1 و جمله آخر a_{99} و تعداد 50 پس داریم:

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{99} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{99}) = \frac{50}{2}(a_1 + a_1 + 98d) = \frac{50}{99} \times \frac{99}{2}(2a_1 + 98d) = \frac{50}{99} S_{99}, S_{99} = 99^2 + 99 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{99} = \frac{50}{99}(99^2 + 99) = \frac{50}{99} \times 99(99 + 1) = 50 \times 100 = 5000$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تکنه:

هرگاه $n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ تا واسطه حسابی بین دو عدد a و b باشد. مجموع این واسطه‌ها از رابطه زیر بدست

$$S = x_1 + \dots + x_n = \frac{n}{2}(a + b)$$

می‌آید:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= \frac{n}{2}(x_1 + x_n) \\ &= \frac{n}{2}(a + d) + (b - d) \\ &= \frac{n}{2}(a + b) \end{aligned}$$

انتیانه:

مثال ۱۷: بین دو عدد ۳ و ۸۷، ۲۳ تا واسطه حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

بیاسخ:

اگر $a = 3$ و $b = 87$ در نظر بگیریم و x_1, \dots, x_{23} واسطه‌های حسابی بین ۳ و ۸۷ باشد در این صورت داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{23} = \frac{23}{2}(3 + 87) = \frac{23 \times 90}{2} = \dots$$

مثال ۱۸:

الف) چند عدد سه رقمی مضرب ۱۵ وجود دارد.

ب) مجموع این اعداد چقدر است؟

بیاسخ:

الف) کوچک‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۵ برابر ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۵ برابر ۹۹۰ می‌باشد. پس دنباله $105, \dots, 990$ یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۰۵ و جمله آخر ۹۹۰ و قدرنسبت ۱۵ است. که تعداد جملات این دنباله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \rightarrow n = \frac{990 - 105}{15} + 1 \rightarrow n = 59 + 1 = 60$$

$$S_{60} = \frac{60}{2}(105 + 990) = \dots$$

ب) در این دنباله $a_1 = 105$ و $a_{60} = 990$ و $n = 60$ پس:

مثال ۱۹: در یک دنباله عددی $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ ، مجموع ده جمله دوم (جمله یازدهم تا بیستم) از مجموع ده جمله اول چقدر بیشتر است؟

بیاسخ:

$$(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{20}) - \frac{1}{2}(a_1 + a_{10}) = \dots$$

تکنه: اگر m, n, p, q چهار عدد طبیعی مختلف باشند به طوری که $m + n = p + q$ و $\{a_k\}$ ها جملات یک دنباله حسابی در

این صورت $a_m + a_n = a_p + a_q$.

مثال ۲۰: در ۱۰۰ جمله‌ی اول یک دنباله حسابی اگر مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر ۳۰۰۰ باشد، حاصل جمع تمام جملات چقدر است؟

۱۰۰۰۰ (۴)

۵۰۰۰۰ (۳)

۵۰۰ (۲)

۵۰۰۰ (۱)

 **پاسخ:**

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_{98} + a_{99} + a_{100}) = 3000 \rightarrow (a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) = 3000$$

$$\frac{a_2 + a_{99} = a_1 + a_{100}}{a_3 + a_{98} = a_1 + a_{100}} \rightarrow 3(a_1 + a_{100}) = 3000 \rightarrow a_1 + a_{100} = 1000 \quad *$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} (a_1 + a_{100}) = \frac{100}{2} \times 1000 = 50000$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

۱-۳- مجموع جملات دنباله هندسی

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌اش را تعیین کند. مخترع شطرنج گفت شطرنج ۶۴ خانه دارد، در خانه اول ۱ گندم و در خانه دوم ۲ گندم و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار دهید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر گندم یک گرم باشد، پادشاه چند گرم گندم باید به مخترع شطرنج بدهد. طبق گفته مخترع شطرنج، جدول زیر را کامل کنید.

شماره خانه	۱	۲	۳	۴	۵	۶۴
تعداد گندم	۱	۲	۴

برای این که بفهمیم چند گرم گندم باید پادشاه به مخترع شطرنج بدهد کافی است مجموع اعداد زیر را حساب کنیم:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + \dots + 2^{63}$$

به نظر آن چگونه می‌توان مجموع فوق را بدست آورد.

یک راه جالب برای این مسئله وجود دارد و آن این است که ابتدا مجموع داده شده را برابر S بگیریم و سپس به صورت زیر عمل کنیم:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + \dots + 2^{62} + 2^{63} \xrightarrow{\text{طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم}} 2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + \dots + 2^{63} + 2^{64}$$

از تفریق دو تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$2S - S = (2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + \dots + 2^{62} + 2^{63}) \rightarrow S = 2^{64} - 1$$

حال می‌خواهیم با این ایده جالب در این بخش مجموع n جمله اول هر دنباله هندسی را بدست آوریم:

دنباله هندسی a_1, a_2, \dots, a_n مفروض است با توجه به این که در دنباله هندسی جمله عمومی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است (که در آن a_1 جمله اول و q قدرنسبت است). می‌توانیم مجموع n جمله اول را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad (1)$$

با ضرب طرفین تساوی (۱) در q داریم:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (2)$$

از تفریق دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_n - qS_n = a_1 - \dots$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - \dots)}{1 - q}$$

نتیجه ← اگر در دنباله هندسی a_1, a_2, \dots, a_n مجموع n جمله اول را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مثال ۲۱: در دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots هر یک از مجموع‌های زیر را برحسب a_1 و q بدست آورید.

الف $a_1 + a_2 + \dots + a_{37}$

ب $a_1 + a_2 + \dots + a_{56}$

بیانیه:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{37} = S_{37} = \frac{a_1(1-q^{37})}{1-q}$$

الف

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{56} = S_{56} = \frac{a_1(1-q^{56})}{1-q}$$

ب

مثال ۲۲: مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ را بیابید.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = \dots$$

بیانیه: در دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ قدرنسبت به صورت روبرو بدست می‌آید:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \dots$$

پس مجموع 10 جمله اول این دنباله برابر است با:

مثال ۲۳: مجموع شش جمله اول دنباله هندسی $a_n = 12(-\frac{1}{2})^n$ چقدر است؟

بیانیه: در این دنباله جمله اول و قدرنسبت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = 12(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=1} a_1 = 12(-\frac{1}{2})^1 = -6$$

$$a_n = 12(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=2} a_2 = 12(-\frac{1}{2})^2 = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \dots$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \dots$$

مثال ۲۴: در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر 12 و جمله هفتم 32 برابر جمله دوم است. مجموع 7 جمله اول کدام است؟

$2(3^7 - 1)$ (۴)

$2(1 - 3^7)$ (۳)

$3(2^7 - 1)$ (۲)

$3(1 - 2^7)$ (۱)

$$a_7 = 32a_2 \xrightarrow{\frac{a_7 = a_1 q^6}{a_2 = a_1 q}} \cancel{a_1} q^6 = 32 \cancel{a_1} q \rightarrow q^5 = 32 \rightarrow q = \dots$$

بیانیه: باتوجه به صورت مسئله داریم:

$$a_3 = 12 \rightarrow a_1 q^2 = 12 \rightarrow a_1 (\dots)^2 = 12 \rightarrow a_1 = \dots$$

از طرفی جمله سوم این دنباله برابر 12 است. پس:

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \dots$$

بنابراین:

پس گزینه صحیح است.

مثال ۲۵: حداکثر چند جمله ابتدایی دنباله $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ را با هم جمع کنیم تا حاصل کمتر از $1/497$ شود.

پاسخ: در این دنباله هندسی که جمله اول آن $a_1 = 1$ و قدرنسبت آن $q = \frac{1}{3}$ است، برای آن که بفهمیم حداکثر مجموع چند جمله ابتدایی کمتر از $1/497$ است کافی است $S_n < 1/497$ ، قرار دهیم بنابراین:

$$S_n < 1/497 \rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} < 1/497 \rightarrow \frac{1(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} < 1/497 \rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n < \frac{2}{3} \times 1/497$$

$$\rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n < 0.998 \rightarrow (\frac{1}{3})^n > 0.002 \rightarrow 3^n < \frac{1000}{2} = 500 \rightarrow n \leq 5$$

مثال ۲۶: مجموع چند جمله از دنباله $3, -9, 27, \dots$ برابر 183 است؟

پاسخ:

دنباله داده شده یک دنباله هندسی است که در آن $a_1 = 3$ و $q = -3$ ، از طرفی مجموع چند جمله ابتدایی آن $S_n = 183$ است. حال ما به دنبال پیدا کردن تعداد این جملات (یعنی n) هستیم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{a_1=3, q=-3} \frac{3(1-(-3)^n)}{1-(-3)} \xrightarrow{183} \frac{61}{4} = \frac{1}{4}(1-(-3)^n)$$

$$\rightarrow 1-(-3)^n = 61 \times 4 \rightarrow 1-(-3)^n = 244 \rightarrow -(-3)^n = 243 \rightarrow (-3)^n = -243 \rightarrow n = 5$$

مثال ۲۷: در دنباله هندسی غیرنزولی $2, x, \frac{1}{3}, \dots$ مجموع دوازده جمله اول کدام است؟

$$\frac{4((\frac{1}{3})^{12} - 1)}{3} \quad (4) \quad \frac{4(1 - (\frac{1}{3})^{12})}{3} \quad (3) \quad 4((\frac{1}{3})^{12} - 1) \quad (2) \quad 4(1 - (\frac{1}{3})^{12}) \quad (1)$$

پاسخ:

$$a_1 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 q^2 = \frac{1}{2} \rightarrow 2q^2 = \frac{1}{2} \rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_{12} = \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = \dots$$

چون دنباله هندسی غیرنزولی است، پس $q = \dots$ قابل قبول است. بنابراین:

پس گزینه صحیح است.

تکلیف: مجموع n جمله اول دنباله هندسی a_1, a_2, \dots, a_n را می‌توان به صورت زیر بدست آورد.

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

مثال ۲۸: بین دو عدد 1 و 81 چند واسطه هندسی درج کنیم تا مجموع جملات دنباله هندسی حاصل برابر 121 شود.

در دنباله داده شده داریم: $a_1 = 1, a_n = 81$ ، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \rightarrow 121 = \frac{1 - 81q}{1 - q} \rightarrow 121(1 - q) = 1 - 81q \rightarrow 121 - 121q = 1 - 81q$$

$$\rightarrow -121q + 81q = 1 - 121 \rightarrow -40q = -120 \rightarrow q = 3$$

بنابراین دنباله به صورت $1, 3, 9, 27, 81$ است پس بین ۱ و ۸۱، سه واسطه هندسی با شرایط فوق می‌توان درج کرد.

مثال ۲۹: در یک دنباله هندسی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3(2^n - 1)$ بدست می‌آید. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

- ۳ (۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۹۲ (۴)

به دو رابطه زیر دقت کنید:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7 = S_7 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_6 = S_6 \end{cases} \rightarrow a_7 = S_7 - S_6$$

حال با توجه به رابطه $S_n = 3(2^n - 1)$ ، جمله هفتم را بدست می‌آوریم:

$$S_7 = 3(2^7 - 1) = 3(128 - 1) = 387 \rightarrow a_7 = 387 - 120 = 267$$

$$S_6 = 3(2^6 - 1) = 3(64 - 1) = 189$$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۳۰: جاهای خالی را پر کنید. (a_n ها جملات دنباله هندسی هستند).

الف $a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{37} = S_{\dots} - S_{\dots}$

ب $a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{37} = \frac{a_{\dots}(1 - q^{\dots})}{1 - q}$

بیانیه:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{37} = S_{37} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_6 = S_6 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم شود}} a_7 + a_8 + \dots + a_{37} = S_{\dots} - S_{\dots}$$

ب جمله اول این مجموع a_7 و قدر نسبت q و تعداد جملات $n = 31$ است، بنابراین:

$$a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{37} = \frac{a_7(1 - q^{31})}{1 - q}$$

مثال ۳۱: در یک دنباله هندسی که ۱۱ جمله دارد. اگر مجموع ۶ جمله اول آن ۶۳ و مجموع ۶ جمله آخر آن ۲۰۱۶ باشد. قدرنسبت این

دنباله کدام است؟

- ۴ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) -۴ (۱)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 63 \rightarrow S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = 63 \quad (1)$$

$$a_6 + a_7 + \dots + a_{11} = 2016 \rightarrow \frac{a_6(1 - q^6)}{1 - q} = 2016 \quad (2)$$

$$\frac{a_6(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{2016}{63} \rightarrow \frac{a_6}{a_1} \rightarrow \frac{a_1 q^5}{a_1} \rightarrow q^5 = \dots \rightarrow q = \dots$$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۳۲: اگر a_n ها جملات دنباله هندسی باشند، جاهای خالی را پر کنید.

الف $a_۳ + a_۵ + a_۷ + \dots + a_{۴۳} = \frac{a_۳(1-q^{\dots})}{1-q^{\dots}}$

ب $a_۱^۳ + a_۲^۳ + a_۳^۳ + \dots + a_{۵۰}^۳ = \frac{a_۱^۳(1-q^{\dots})}{1-q^{\dots}}$

پاسخ:

الف مجموع داده شده، مجموع یک دنباله هندسی با جمله اول $a_۳$ و قدرنسبت $q^۲$ است، که تعداد جملات آن $n = ۲۱$ است.

$$a_۳ + a_۵ + a_۷ + \dots + a_{۴۳} = \frac{a_۳(1-(q^۲)^{۲۱})}{1-q^۲} = \dots$$

ب مجموع داده شده، مجموع یک دنباله هندسی با جمله اول $a_۱^۳$ و قدرنسبت $q^۳$ است که تعداد جملات آن $n = ۵۰$ است. بنابراین:

$$a_۱^۳ + a_۲^۳ + a_۳^۳ + \dots + a_{۵۰}^۳ = \frac{a_۱^۳(1-(q^۳)^{۵۰})}{1-q^۳} = \dots$$

مثال ۳۳: در ۲۰ جمله ابتدایی از یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{۴}{۳}$ ، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲ است. مجموع ۵ جمله اول این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_۱ + a_۳ + a_۵ + \dots + a_{۱۹} = \frac{a_۱(1-(q^۲)^{۱۰})}{1-q^۲} = \frac{a_۱(1-q^{۲۰})}{1-q^۲} \quad (۱)$$

$$a_۲ + a_۴ + a_۶ + \dots + a_{۲۰} = \frac{a_۲(1-(q^۲)^{۱۰})}{1-q^۲} = \frac{a_۲(1-q^{۲۰})}{1-q^۲} \quad (۲)$$

$$\frac{a_۲ + a_۴ + a_۶ + \dots + a_{۲۰}}{a_۱ + a_۳ + a_۵ + \dots + a_{۱۹}} = ۲ \xrightarrow{(۲)} \frac{a_۲(1-(q^۲)^{۱۰})}{a_۱(1-q^{۲۰})} = ۲ \rightarrow \frac{a_۲}{a_۱} = ۲ \rightarrow q = ۲$$

با توجه به فرض مسئله داریم که:

$$S_۵ = \frac{a_۱(1-q^۵)}{1-q} = \dots$$

بنابراین مجموع ۵ جمله اول این دنباله برابر است با:

نکته: در یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت q داریم:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$\frac{S_{۳n}}{S_n} = 1 + q^n + q^{۲n}$$

مثال ۳۴: در یک دنباله هندسی مجموع ۳ جمله اول ۱۱۲ و مجموع ۶ جمله اول ۱۲۶ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = S_۳ = ۱۱۲$$

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶ = S_۶ = ۱۲۶ \xrightarrow{\text{طبق نکته قبل}} \frac{S_۶}{S_۳} = \frac{S_۶ \times ۳}{S_۳} = 1 + q^۳ \rightarrow 1 + q^۳ = \frac{۱۲۶}{۱۱۲}$$

$$q^۳ = \frac{۱۲۶}{۱۱۲} - 1 = \frac{۱۴}{۱۱۲} = \frac{۱}{۸} \rightarrow q = \dots$$

مثال ۳۵: اگر n عددی فرد باشد، با استفاده از مجموع جملات در دنباله هندسی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} - \dots + a^2 - a + 1)$$

$$1 - a + a^2 - \dots + a^{n-3} - a^{n-2} + a^{n-1}$$

پاسخ: عبارت روبه‌رو را در نظر بگیرید:

مجموع عبارت بالا را می‌توان مجموع یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-a)$ در نظر گرفت پس داریم:

$$1 - a + a^2 - \dots + a^{n-3} + a^{n-2} + a^{n-1} = \frac{1(1 - (-a)^n)}{1 - (-a)} \stackrel{\text{فرداست } n}{(-a)^n = -a^n} \frac{1(1 + a^n)}{1 + a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (1 + a)(1 - a + a^2 - \dots + a^{n-3} - a^{n-2} + a^{n-1}) = 1 + a^n$$

۱, ۱۱, ۱۱۱, ...

مثال ۳۶: مجموع n جمله اول دنباله روبه‌رو را تعیین کنید.

$$S = 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{1 \text{ تا } n} \xrightarrow{\times 9} 9S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{9 \text{ تا } n}$$

پاسخ:

$$9S = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1) + \dots + \underbrace{(1000\dots0 - 1)}_{0 \text{ تا } n}$$

$$9S = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$9S = (10 + 10^2 + \dots + 10^n) - n$$

$$9S = \frac{10(1 - (10)^n)}{1 - 10} - n = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9} \rightarrow S = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}$$

تکنه: اگر m, n, p, q چهار عدد طبیعی باشد به طوری که $m + n = p + q$ و a_k ها جملات دنباله هندسی، در این صورت:

$$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$$

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = ?$$

مثال ۳۷: اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله هندسی ۲ باشد، حاصل ضرب روبه‌رو را بیابید.

$$a_1 a_9 = a_2 a_8 = a_3 a_7 = a_4 a_6 = a_5 a_5 = (a_5)^2$$

پاسخ: طبق نکته قبل می‌توان نوشت:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_9 = (a_5)^4 \cdot a_5 = a_5^9 = 2^9 = 512$$

پس داریم:

مثال ۳۸: برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است. که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها

یک چهارم می‌شود حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۶ درصد کاهش یابد؟

پاسخ: پس از عبور از هر لایه شدت تابش یک چهارم می‌شود پس دنباله زیر میزان کاهش شدت تابش در هر مرحله است:

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, \dots$$

برای آنکه بفهمیم حداقل از چند لایه استفاده کنیم باید در دنباله فوق S_n را بزرگتر از $\frac{96}{100}$ قرار دهیم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4}} \frac{\frac{3}{4}(1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}} > \frac{96}{100} \rightarrow 1 - (\frac{1}{4})^n > \frac{96}{100}$$

$$\rightarrow -(\frac{1}{4})^n > \frac{96}{100} - 1 = -\frac{4}{100} \rightarrow (\frac{1}{4})^n < \frac{4}{100} \rightarrow 4^n > 25 \rightarrow n \geq 3$$

پس حداقل باید از سه لایه استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۶ درصد کاهش یابد.

$$S_n < \frac{a_1}{1-q}$$

نکته: در یک دنباله هندسی با جملات مثبت و قدر نسبت بین ۰ و ۱ داریم:

مثال ۳۹: احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او در روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۹۹٪ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. آیا احمد می‌تواند بعد از مدتی ۱۰۰/۰۰۰ تومان جمع کند.

پاسخ:

روز سوم ، $\left(\frac{99}{100}\right)^2 \times 1000$ ، روز دوم ، $\frac{99}{100} \times 1000$ ، روز اول ، ۱۰۰۰ ،

حال مجموع پول‌های احمد را در n روز حساب می‌کنیم. دنباله فوق یک دنباله هندسی با جمله اول ۱۰۰۰ و قدرنسبت $\frac{99}{100}$ است. پس طبق نکته

$$\text{قبل } S_n < \frac{a_1}{1-q} \text{ پس داریم:}$$

$$S_n < \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n < \frac{1000}{1 - \frac{99}{100}} = \frac{1000}{\frac{1}{100}} = 100000$$

بنابراین هر چند روز که احمد بدین شکل پول خود را در صندوق اضافه کند پول وی به ۱۰۰۰۰۰۰ نمی‌تواند برسد.



نمونه‌ها:

- ۱- بر محیط دایره‌ای ۱۰ نقطه متمایز وجود دارد از هر نقطه به نقطه دیگر وصل می‌کنیم تعداد کل وترهای متمایز را بدست آورید.
- ۲- یک ساعت دیواری رأس ساعت به تعداد همان ساعت زنگ می‌زند، علاوه بر آن هر نیم ساعت نیز یک‌بار زنگ می‌زند این ساعت در شبانه‌روز چند بار زنگ می‌زند.
- ۳- در اعداد طبیعی از ۱ تا چه عددی را به‌طور متوالی باهم جمع کنیم تا حاصل $\frac{5}{9}$ مربع همان عدد شود.
- ۴- مجموع $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ را بدست آورید.
- ۵- حاصل $101 + 39 + 38 + 37$ را بدست آورید.
- ۶- مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله $3, 7, 11, \dots$ را بدست آورید.
- ۷- در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۳ و هر جمله از جمله ما قبل آن $\frac{1}{3}$ کمتر است، مجموع ۱۰ جمله اول آن را بیابید.
- ۸- در یک دنباله حسابی جمله اول و قدرنسبت باهم برابرند. اگر جمله ششم ۳۰ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول آن را بیابید.
- ۹- اگر مجموع سه جمله اول، ۹ برابر قدرنسبت باشد، مجموع یازده جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟
- ۱۰- اگر در یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول ۳۳ و مجموع هفت جمله اول $\frac{287}{5}$ باشد، قدرنسبت چقدر است؟
- ۱۱- در یک دنباله عددی به جمله اول ۴ واحد و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم به مجموع ۱۰ جمله اول چقدر اضافه خواهد شد؟
- ۱۲- در یک دنباله حسابی مجموع ۷ جمله اول برابر مجموع ۲۳ جمله اول آن است، مجموع ۳۰ جمله اول را بیابید.
- ۱۳- در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ ، مجموع جملات چهارم و پنجم را بیابید.
- ۱۴- مجموع چند جمله از دنباله $2, 6, 10, \dots$ برابر جمله سیزدهم است.
- ۱۵- در دنباله حسابی $2, 1, 4, 7, \dots$ حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل ۳ رقمی شود.
- ۱۶- در یک دنباله عددی مجموع بیست جمله اول ۳ برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد. جمله دهم چقدر است؟
- ۱۷- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی $a, 2a+1, 3a+2, \dots$ برابر ۱۵۵ است. جمله هفتم این دنباله چقدر است؟
- ۱۸- مجموع اعداد طبیعی کمتر از ۵۰ که بر ۳ بخش پذیرند را بیابید.
- ۱۹- در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = \frac{3}{2}n - 2$ مجموع جملات متوالی شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام را بیابید.
- ۲۰- در یک دنباله عددی که دارای ۱۷ جمله است. جمله نهم برابر ۸ است. مجموع جملات این دنباله چقدر است؟
- ۲۱- در یک دنباله حسابی $a_7 + a_{16} = 42$ است مجموع ۲۲ جمله اول این دنباله را بیابید.
- ۲۲- مجموع همه عددهای صحیح بین ۲۰ و ۱۲۰۰ مختوم به رقم ۵ چقدر است؟
- ۲۳- اگر در یک دنباله حسابی جمله اول n و جمله آخر $13n$ و مجموع جملات آن $49n$ باشد، تعداد جملات را بیابید.
- ۲۴- در یک دنباله عددی $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 20$ مقدار S_{13} چقدر است؟
- ۲۵- مجموع اعداد دو رقمی، که در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده ۴ دارند را بیابید.
- ۲۶- اگر مجموع اولین n عدد فرد ۴۴۱۰ باشد، n چقدر است؟
- ۲۷- بین ۱ و ۸۱ چند جمله درج شود تا مجموع جمله‌های دنباله حسابی برابر ۲۴۶ گردد.
- ۲۸- جمله هفتم از یک دنباله حسابی ۲۷ و مجموع بیست‌ویک جمله اول این دنباله ۹۰۳ است، مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

۲۹- در دو دنباله حسابی $\begin{cases} 4, 7, 10, \dots \\ 1, 5, 9, \dots \end{cases}$ مجموع جملات مشترک کوچکتر از ۱۰۰ را بیابید.

۳۰- اگر در یک دنباله حسابی $S_4 = 54$ و $S_8 = 60$ قدرنسبت چقدر است؟

۳۱- مجموع چند جمله دنباله هندسی $6, 12, 24, \dots$ برابر ۳۷۸ است؟

۳۲- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ است. مجموع شش جمله اول آن را بیابید.

۳۳- مجموع چند جمله‌ی دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر ۱۰۲۶ است؟

۳۴- در یک دنباله هندسی جمله اول ۳ و جمله ششم ۹۶ است، مجموع پنج جمله اول دنباله را بیابید.

۳۵- اگر $4x + 2, x + 2, x - 2$ جملات متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند مجموع هشت جمله بعدی را بدست آورید.

۳۶- حاصل ضرب زیر را به ازای $x = \sqrt{2}$ بدست آورید.

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^7)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^7)$$

۳۷- مجموع ۱۰۰ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴ چند برابر مجموع جملات ردیف فرد آن ۱۰۰ جمله است؟

۳۸- اگر مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی ۶۳ و مجموع سه جمله اول آن ۷ باشد، جمله ششم چند برابر جمله دوم است؟

۳۹- در یک دنباله هندسی $S_n = \frac{2^n - 1}{5}$ جمله عمومی دنباله را بیابید.

۴۰- در یک دنباله هندسی صعودی، نسبت مجموع هر سه جمله متوالی به اولین جمله در بین آن سه، دو برابر مجذور قدرنسبت است، قدرنسبت را بیابید.

۴۱- در یک دنباله هندسی نزولی با جمله اول ۲ مجموع چهار جمله دوم $\frac{1}{16}$ مجموع چهار جمله اول آن است، جمله اول این دنباله را بیابید.

۴۲- دنباله هندسی $4, a, 1, b, \dots$ غیرنزولی است. مجموع چند جمله اول آن برابر $\frac{21}{8}$ است.

۴۳- در یک دنباله هندسی صعودی اگر مجموع سه جمله دوم تا چهارم برابر ۳ و مجموع سه جمله چهارم تا ششم برابر ۲۴۳ باشد. جمله شانزدهم چند برابر جمله هفتم است.

۴۴- حاصل ضرب ۵ جمله اول دنباله هندسی به صورت $1^5 \times 3^1$ است، جمله سوم را بیابید.

۴۵- در یک دنباله هندسی با تعداد جملات فرد ثابت کنید حاصل ضرب جملات برابر است جمله وسط به توان تعداد جملات.

۴۶- مجموع ده جمله اول دنباله $5, 55, 555, \dots$ را بیابید.

۴۷- ثابت کنید هر تعداد از اعداد دنباله زیر را در هم ضرب کنیم حاصل ۲ نمی شود.

$$\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2}, \sqrt[16]{2}, \dots$$

۴۸- جمله عمومی یک دنباله به صورت $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، حاصل $\frac{a_2}{a_1}$ چقدر است؟

۴۹- در یک دنباله هندسی اگر تمام جملات را معکوس کنیم مجموع ۱۰ جمله اول نصف می شود، در این دنباله حاصل ضرب ده جمله اول چقدر است؟

۵۰- تویی را از زمین به هوا پرتاب می کنیم تا به ارتفاع ۶ متری برسد بعد از هر بار به زمین خوردن به اندازه ۲۰ درصد ارتفاع قبلی بالاتر می رود. نشان دهید پس از شروع پرتاب مسافت طی شده کمتر از ۱۵ متر است.

تست‌های درس اول (مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی)



۱- در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۰)

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

(سراسری ریاضی - ۹۳)

۲- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۳- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۴)

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۴- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

(سراسری فارغ-ریاضی - ۹۰)

- ۹ (۱) $\frac{29}{3}$ (۲) $\frac{49}{3}$ (۳) ۱۸ (۴)

۵- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(سراسری فارغ-ریاضی - ۹۱)

- ۴۲۸ (۱) ۴۸۴ (۲) ۴۸۶ (۳) ۴۸۸ (۴)

(سراسری فارغ-ریاضی - ۹۳)

۶- حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ ، کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۷- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۰ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۱۲ است. قدر نسبت آن کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی - ۹۲)

- $\frac{14}{9}$ (۱) $\frac{16}{9}$ (۲) $\frac{14}{15}$ (۳) $\frac{16}{15}$ (۴)

(گزینه ۲- ریاضی - ۹۲)

۸- در یک دنباله‌ی حسابی $a_7 = 20$ ، حاصل $a_3 + a_6 + a_8 + a_{11}$ کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴)

۹- اگر مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲۰ باشد، قدر نسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

(گزینه ۲- ریاضی - ۹۲)

- ۷ (۱) -۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

(گزینه ۲- ریاضی - ۹۲)

۱۰- اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = m$ و $a_7 = 2m - 1$ و $a_3 = m - 4$ باشد، S_9 چه قدر است؟

- ۸۰ (۱) -۸۱ (۲) -۶۴ (۳) -۶۵ (۴)

۱۱- اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_5 = 12$ و $a_{12} = 33$ باشد مجموع $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ چه قدر است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۲۰

۱۲- در یک دنباله‌ی عددی اگر به قدر نسبت آن ۲ واحد اضافه شود، به مجموع ۱۰ جمله‌ی اول چه قدر افزوده می‌شود؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

۱۳- در یک دنباله‌ی عددی غیر ثابت، جمله‌ی نهم نصف جمله‌ی پنجم است. مجموع چند جمله‌ی اول این دنباله صفر است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۲۴ (۴) ۱۶

۱۴- در یک دنباله‌ی هندسی به صورت $a, 9a, b, \dots$ مجموع هشت جمله‌ی اول چند برابر مجموع چهار جمله‌ی اول است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

- (۱) $\frac{97}{16}$ (۲) $\frac{65}{16}$ (۳) $\frac{97}{81}$ (۴) $\frac{16}{65}$

۱۵- در یک دنباله‌ی عددی $a_n = 2n - 5$ ، اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله باشد حاصل $\frac{S_{2n}}{S_n}$ بر حسب n کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

- (۱) $\frac{4n-8}{n-4}$ (۲) $\frac{4n-2}{n-8}$ (۳) $\frac{4n-2}{n-4}$ (۴) $\frac{2n-8}{n-2}$

۱۶- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع $2n$ جمله‌ی اول، از رابطه‌ی $2n^2 + 5n$ به دست می‌آید. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۷- حاصل $\frac{1-q^2+q^4-\dots-q^{14}}{1+q^4+q^8+q^{12}}$ به ازای $q = 1 - \sqrt{2}$ چه قدر است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

- (۱) $2\sqrt{2} - 2$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2 - 2\sqrt{2}$ (۴) $2 + 2\sqrt{2}$

۱۸- در دنباله‌ی هندسی متناهی a_1, a_2, \dots, a_n با قدر نسبت ۲، مجموع $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n}$ چند برابر مجموع کل جملات است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۱۹- مجموع جملات سوم و سیزدهم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ است. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۰

۲۰- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی دهم ۲۰ واحد از جمله‌ی پنجم بیشتر است. اگر جمع جملات هشتم و دوازدهم ۷۶ برابر باشد، حداقل

چند جمله از این دنباله را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۲۰۰ شود؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۲۱- اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی نوزدهم ۲ برابر جمله‌ی سی‌ام باشد، مجموع چند جمله‌ی اول این دنباله برابر صفر است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۶)

- (۱) ۴۱ (۲) ۸۱ (۳) ۸۲ (۴) ۴۰

۲۲- جمله n ام یک دنباله حسابی برابر $an + 3$ و مجموع n جمله اول آن برابر $bn^2 + 2n$ است حاصل $a + b$ کدام است؟

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۶)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۳- در دنباله عددی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۵ و ۱۷ می باشد، مجموع ۱۸ جمله اول آن کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۲)

- ۱ (۲۴۳) ۲ (۲۵۲) ۳ (۲۷۹) ۴ (۲۸۸)

۲۴- مجموع n جمله اول از دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 - 3n$ است. جمله هشتم کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۳)

- ۱ (۱۰) ۲ (۱۱) ۳ (۱۲) ۴ (۱۴)

۲۵- حاصل عبارت $\frac{1-t+t^2-t^3+\dots-t^{11}}{1-t^3+t^6-t^9}$ به ازای $t = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۴)

- ۱ (۷) ۲ (۶) ۳ (۵) ۴ (۴)

۲۶- مجموع $n+2$ عدد فرد متوالی شروع از ۱ کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۴)

- ۱ $(n+2)^2$ ۲ $n^2 + 2n$ ۳ $(n+1)^2$ ۴ $n^2 + 4n$

۲۷- در دنباله $5, 9, 13, \dots$ حداقل چند جمله اول آن را جمع کنیم تا حاصل بزرگتر از ۹۰۰ باشد؟

(سنجش-ریاضی ۹۴)

- ۱ (۲۰) ۲ (۲۱) ۳ (۲۲) ۴ (۲۳)

۲۸- در یک دنباله هندسی با ۳ جمله، بین هر دو جمله، عددی چنان قرار می دهیم که دنباله حاصل، یک دنباله هندسی با ۵ جمله باشد. اگر

(سنجش-ریاضی ۹۵)

- ۱ $2(13+2\sqrt{3})$ ۲ $2(13+4\sqrt{3})$ ۳ $26+2\sqrt{3}$ ۴ $26+4\sqrt{3}$



درس دوم: معادلات درجه دوم

۱-۲- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

در سال گذشته با معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) و روش‌های حل آن آشنا شده‌اید. در بین روش‌های ارائه شده، روش کلی حل معادله درجه دوم روشی بود که مستقیماً جواب معادله درجه دوم را در صورت وجود به ما نشان می‌داد.

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) ابتدا عدد $\Delta = b^2 - 4ac$ را حساب می‌کنیم. که یکی از سه اتفاق زیر رخ می‌دهد:



معادله درجه دوم جواب ندارد $\rightarrow \Delta < 0$

معادله درجه دوم یک جواب دارد $\rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ $\Delta = 0$

معادله درجه دوم دو جواب دارد $\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ $\Delta > 0$

حال در حالتی که $\Delta \geq 0$ است به دنبال آن هستیم که بین جمع ریشه‌ها ($x_1 + x_2$) و هم‌چنین ضرب ریشه‌ها ($x_1 \cdot x_2$) و ضرایب (a, b, c) رابطه‌هایی پیدا کنیم. برای بدست آوردن این رابطه‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \dots = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نکته: اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) جواب داشته باشد ($\Delta \geq 0$) و جمع ریشه‌ها را با S و ضرب ریشه‌ها

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

را با P نمایش دهیم روابط روبه‌رو برقرارند.

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	Δ	a	b	c	S	P
$x^2 - 7x + 1 = 0$	$\Delta = 49 - 4 = 45$	۱	-۷	۱	۷	۱
$x^2 + 11x - 1 = 0$						
$2x^2 - x + 7 = 0$						
$3x^2 - 6x - 1 = 0$						

از طرفی می‌دانیم X_2 جواب معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ است. پس اگر در معادله به جای X ، مقدار $X_2 = \dots$ را قرار دهیم تساوی برقرار است.
 $x_2 = \dots \rightarrow (\dots)^2 - 3m(\dots) + 4 = 0 \rightarrow m = \dots$

مثال ۵: در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها ۲ واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، مقدار m و هر دو جواب را بیابید.

پاسخ: اگر جواب‌های معادله X_1 و X_2 باشد، طبق فرض مسئله $X_2 = X_1 + 2$ حال به کمک ضرائب معادله درجه دوم داده شده جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$2x^2 - 8x + m = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{b=.....}{a=.....} \rightarrow x_1 + x_2 = \dots\dots\dots$$

با حل دستگاه زیر مقدار X_1 و X_2 بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dots\dots\dots \\ x_2 = x_1 + 2 \end{cases} \rightarrow x_1 + (x_1 + 2) = \dots\dots \rightarrow x_1 = \dots\dots, x_2 = \dots\dots\dots$$

$$2x^2 - 8x + m = 0 \rightarrow x_1 x_2 = P = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{m}{2} = \dots\dots\dots \rightarrow m = \dots\dots\dots$$

مثال ۶: در معادله درجه دوم $m \cdot 8x^2 - mx + 1 = 0$ را چنان بیابید که یکی از ریشه‌ها مربع ریشه دیگر باشد.

پاسخ: اگر X_1 و X_2 ریشه‌های معادله $8x^2 - mx + 1 = 0$ باشد طبق فرض مسئله $X_2 = X_1^2$ حال به کمک ضرائب معادله درجه دوم داده شده جمع و ضرب ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$8x^2 - mx + 1 = 0 \xrightarrow[\begin{matrix} a=....., b=..... \\ c=..... \end{matrix}]{\quad} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{m}{8} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = \dots\dots\dots \xrightarrow{x_2 = x_1^2} x_1 (x_1)^2 = \dots\dots\dots \rightarrow (x_1)^3 = \dots\dots\dots \rightarrow x_1 = \dots\dots, x_2 = (\dots\dots)^2 = \dots\dots$$

از طرفی می‌دانیم $x_1 + x_2 = \frac{m}{8}$ است، حال که مقادیر X_1 و X_2 را محاسبه کرده‌ایم می‌توانیم m را بدست آوریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{8} \rightarrow \frac{m}{8} = \dots\dots \rightarrow m = \dots\dots$$

نکته ۲: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) مجموع ضرایب صفر باشد ($a + b + c = 0$) یک ریشه معادله ۱ و ریشه

دیگر $\frac{c}{a}$ است.

نکته ۳: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)، $a + c = b$ ، یک ریشه معادله -۱ و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

مثال ۷: هر یک از معادلات زیر را با نکات فوق حل کنید.

الف $47x^2 - 48x + 1 = 0$

ب $32x^2 + 19x - 13 = 0$

پاسخ:

الف

$$47x^2 - 48x + 1 = 0 \xrightarrow[\begin{matrix} a=....., b=..... \\ c=..... \end{matrix}]{\quad} a + b + c = \dots\dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \dots\dots \end{cases}$$

ب

$$32x^2 + 19x - 13 = 0 \xrightarrow[c=\dots]{a=\dots, b=\dots} \dots + \dots = \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-c}{a} = \dots \end{cases}$$

مثال ۸: اگر در معادله $ax^2 + 2bx + c = 0$ رابطه $a + 4c = 4b$ برقرار باشد، یک ریشه معادله کدام است؟

(۱) $\frac{c}{2a}$
 (۲) $\frac{-c}{2a}$
 (۳) $\frac{2c}{a}$
 (۴) $\frac{-2c}{a}$

بیانیه:

$$a + 4c = 4b \rightarrow a - 4b + 4c = 0 \xrightarrow{\div 4} \frac{a}{4} - b + c = 0 \rightarrow a\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + 2b\left(\frac{-1}{4}\right) + c = 0$$

پس یک ریشه معادله $ax^2 + 2bx + c = 0$ برابر $-\frac{1}{4}$ است.

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1 = \frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right)x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow x_2 = \dots$$

پس گزینه صحیح است.

نکته ۴: معادله درجه دوم $(a \neq 0)ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی دو ریشه قرینه حقیقی دارد که $b = 0$ و $\Delta > 0$.

مثال ۹: اگر معادله درجه دوم $(m+1)x^2 + (m^2 - 4)x - 2 = 0$ دو ریشه قرینه داشته باشد، مقدار m چقدر است؟

بیانیه: با توجه به نکته (۴) در صورتی معادله درجه دوم دو ریشه قرینه دارد که $b = 0$ باشد. پس داریم:

$$b = (m^2 - 4) \rightarrow m^2 - 4 = 0 \rightarrow m^2 = \dots \rightarrow \begin{cases} m = \dots \\ m = \dots \end{cases}$$

$m = \dots$ قابل قبول نیست چون دلتای معادله درجه دوم منفی می‌شود و معادله جواب ندارد.

نکته ۵: معادله درجه دوم $(a \neq 0)ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی دو ریشه معکوس حقیقی دارد که $a = c$ و $\Delta \geq 0$.

مثال ۱۰: اگر معادله درجه دوم $m^2x^2 + (2m-1)x + 1 = 0$ دو ریشه حقیقی معکوس داشته باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) 1
 (۲) -1
 (۳) ± 1
 (۴) $\frac{1}{2}$

بیانیه: معادله درجه دوم داده شده هنگامی دو ریشه حقیقی معکوس دارد که $a = c$ باشد. پس داریم:

$$m^2x^2 + (2m-1)x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = m^2 \\ c = 1 \end{cases} \xrightarrow{a=c} m^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} m = \dots \\ m = \dots \end{cases}$$

$m = \dots$ قابل قبول نیست چون دلتای معادله درجه دوم منفی می‌شود. پس گزینه صحیح است.

نکته ۶: اگر در معادله درجه دوم $(a \neq 0)ax^2 + bx + c = 0$ ، $P < 0$ باشد، معادله دو ریشه متمایز دارد.

مثال ۱۱: به کمک نکته ۶ مشخص کنید کدام معادله زیر همواره دو ریشه متمایز دارد.

الف $37x^2 - 7x + 1 = 0$

ب $54x^2 + 13x - 1 = 0$

بیاسخ: با توجه به نکته (۶)، هرگاه در معادله درجه دوم $P < 0$ باشد و یا به عبارتی ضرایب a و c هم علامت نباشند. معادله دو ریشه متمایز دارد پس معادله همواره دو ریشه متمایز دارد. در معادله دیگر هم Δ منفی است و معادله جواب ندارد.

مثال ۱۲: جاهای خالی را با استفاده از اتحادهای جبری پر کنید.

- الف $x_1^2 + x_2^2 = (\dots + \dots)^2 - \dots$ ب $x_1^3 + x_2^3 = (\dots + \dots)^3 - 3x_1x_2(\dots + \dots)^2$
- پ $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = \dots + \dots + 2\sqrt{\dots}$ ت $(x_1 - x_2)^2 = (\dots + \dots)^2 - 4x_1x_2$

بیاسخ:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

الف

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 \rightarrow (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2^3 \rightarrow$$

ب

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

پ

$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = (\sqrt{x_1})^2 + 2(\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}) + (\sqrt{x_2})^2 = x_1 + 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}$$

ت

$$(x_1 - x_2)^2 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\substack{\text{با توجه به قسمت الف} \\ \uparrow}} - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

با توجه به قسمت الف

نکته ۷: اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) دو ریشه x_1 و x_2 داشته باشد و S و P جمع و ضرب ریشه‌ها باشند در این صورت داریم:

صورت داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P}$$

مثال ۱۳: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 4x - 1 = 0$ باشد. حاصل $|x_1^2 - x_2^2|$ را بدست آورید.

بیاسخ:

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \dots \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = \dots \end{cases}$$

$$|x_1^2 - x_2^2| \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک مزدوج}} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = |x_1 - x_2| |x_1 + x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} (|S|)$$

$$\begin{aligned} S &= \dots \\ P &= \dots \end{aligned} \quad (\sqrt{(\dots)^2 - 4(\dots)}) (|\dots|) = \dots$$

مثال ۱۴: اگر x_1 و x_2 ریشه معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند. حاصل $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۵ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

بیاسخ:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow{a=..., b=..., c=...} \begin{cases} x_1 + x_2 = S = \dots\dots \\ x_1 x_2 = P = \dots\dots \end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل $A = x_1 \sqrt{x_2} + x_2 \sqrt{x_1}$ کافی است طرفین را به توان ۲ برسانیم:

$$\begin{aligned} A^2 &= (x_1 \sqrt{x_2} + x_2 \sqrt{x_1})^2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2} = x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2} \\ &= P(S) + 2P\sqrt{P} = \dots\dots\dots \rightarrow A^2 = \dots\dots \rightarrow A = \dots\dots \end{aligned}$$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۱۵: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند. حاصل $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ را بدست آورید.

بیاسخ:

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \xrightarrow{a=..., b=..., c=...} \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dots\dots \\ P = x_1 x_2 = \dots\dots \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{S^2 - 2SP}{P^2} = \frac{(\dots)^2 - 2(\dots)(\dots)}{(\dots)^2} = \dots\dots$$

مثال ۱۶: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - x - 7 = 0$ باشد. حاصل $(x_1^2 - 7)(x_2^2 - 7)$ را بیابید.

بیاسخ:

$$x^2 - x - 7 = 0 \xrightarrow{a=..., b=..., c=...} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \dots\dots & , & x_1^2 - x_1 - 7 = 0 \rightarrow x_1^2 - 7 = x_1 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \dots\dots & , & x_2^2 - x_2 - 7 = 0 \rightarrow x_2^2 - 7 = x_2 & (2) \end{cases}$$

$$(x_1^2 - 7)(x_2^2 - 7) = x_1 \cdot x_2 = \dots\dots$$

از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

مثال ۱۷: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ باشد، حاصل $(\alpha^3 - 5\alpha^2 + \beta)(\beta^3 - 5\beta^2 + \alpha)$ چقدر است؟

بیاسخ:

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \xrightarrow{a=..., b=..., c=...} \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dots\dots \\ P = \alpha\beta = \dots\dots \end{cases}$$

از طرفی α ریشه معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ است پس می‌توان به جای x ، α را قرار داد:

$$\alpha^2 - 5\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 5\alpha = 1 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 - 5\alpha^2 = \alpha \quad (1)$$

هم‌چنین β ریشه معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ است. و می‌توان به جای x ، β را قرار داد:

$$\beta^2 - 5\beta - 1 = 0 \rightarrow \beta^2 - 5\beta = 1 \xrightarrow{\times \beta} \beta^3 - 5\beta^2 = \beta \quad (2)$$

$$(\alpha^3 - 5\alpha^2 + \beta)(\beta^3 - 5\beta^2 + \alpha) \stackrel{(1)}{\stackrel{(2)}}{=} (\alpha + \beta)(\beta + \alpha) = S \times S = S^2 = \dots\dots\dots$$

مثال ۱۸: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند. حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ چقدر است؟

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \xrightarrow[c=\dots]{a=\dots, b=\dots} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \dots\dots \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \dots\dots \end{cases}$$

بیاسخ:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha \quad (1)$$

 α ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 2x - 4 = 0$ است پس داریم:

بنابراین داریم:

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 \stackrel{(1)}{=} (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) = \dots\dots\dots$$

مثال ۱۹: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ باشند. حاصل $x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2$ چقدر است؟

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = S = \dots\dots \\ x_1 x_2 = P = \dots\dots \end{cases}$$

بیاسخ:

 از طرفی x_2 ریشه معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ است. پس داریم:

$$x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0 \rightarrow x_2^2 = 1 - 2x_2 \xrightarrow{\text{بهار توان ۲}} (x_2^2)^2 = (1 - 2x_2)^2 \rightarrow x_2^4 = 1 + 4x_2^2 - 4x_2$$

$$\rightarrow x_2^4 - 1 = 4x_2^2 - 4x_2 \quad (1)$$

 حال حاصل $x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2$ را بدست می‌آوریم:

$$x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2 \stackrel{(1)}{=} x_1^4 + x_2^4 - 1 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 - 1$$

$$= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 - 1 = ((\dots)^2 - 2(\dots))^2 - 2(\dots)^2 - 1 = \dots\dots\dots$$

مسئله کل: معادله درجه دومی بسازید که $x = \alpha$ و $x = \beta$ ریشه‌های آن باشند.

بیاسخ: معادله درجه دوم موردنظر به راحتی قابل ساختن و به صورت $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ است که پس از ساده کردن به صورت

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \text{ در می‌آید.}$$

نتیجه ← اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ معلوم باشند، آن‌گاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مثال ۲۰: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشند.

 بیاسخ:

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \sqrt{2} \\ \beta = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \\ P = \alpha\beta = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1 \end{cases} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

مثال ۲۱: معادله درجه دومی با ضرایب گویا بیابید که یکی از ریشه‌های آن $2 + \sqrt{3}$ باشد.

بیاسخ: اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ ریشه معادله درجه دوم باشد در این صورت داریم:

$$x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow (x - 2) = \sqrt{3} \rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

 بنابراین معادله درجه دوم مورد نظر به صورت $x^2 - 4x + 1 = 0$ است که یکی از ریشه‌های آن $2 + \sqrt{3}$ می‌باشد.

مثال ۲۲: طول و عرض مستطیلی که محیط آن ۲۲ و مساحت آن ۲۸ است. کدام است؟

۲۸, ۱۱ (۱) ۴, ۷ (۲) ۴, ۹ (۳) ۷, ۵ (۴)

پاسخ: اگر طول مستطیل را X و عرض آن را y در نظر بگیریم. داریم:

$$2(x + y) = 22 \rightarrow x + y = 11 \rightarrow y = 11 - x \quad (1)$$

$$xy = 28 \xrightarrow{(1)} x(11 - x) = 28 \rightarrow 11x - x^2 = 28 \rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0.$$

حال معادله درجه دوم فوق را حل می‌کنیم تا مقدار X (طول مستطیل) محاسبه شود.

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \rightarrow (x - 7)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \rightarrow x = 7 \xrightarrow{(1)} y = 4 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \xrightarrow{(1)} y = 7 \end{cases}$$

پس طول مستطیل ۷ و عرض آن ۴ می‌باشد. یعنی گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۲۳: معادله درجه دومی را بیابید که ریشه‌های آن از ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ یک واحد کمتر باشد.

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادله خواسته شده X_1 و X_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند آن‌گاه داریم:

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} \alpha = 2x_1 - 1 \\ \beta = 2x_2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2x_1 - 1 + 2x_2 - 1 = 2(x_1 + x_2) - 2 \\ \alpha\beta = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 4(x_1 x_2) - 2(x_1 + x_2) + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2(\dots) - 2 = \dots = S \\ \alpha\beta = 4(\dots) - 2(\dots) + 1 = \dots = P \end{cases} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \dots$$

مثال ۲۴: ثابت کنید معادله درجه دومی که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد به صورت:

$$cx^2 + bx + a = 0 \text{ است.}$$

پاسخ:

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند. آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

از طرفی ریشه‌های معادله درجه دومی که معکوس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است. به صورت $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} \\ P = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} \end{cases} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{-b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0 \xrightarrow{\times c} cx^2 + bx + a = 0.$$

مثال ۲۵: اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس ریشه‌های معادله $5x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد. مقادیر a و b را بیابید.

بیانیه: اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ باشند. آن‌گاه:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-a}{3} & (1) \\ \alpha\beta = \frac{b}{3} & (2) \end{cases}$$

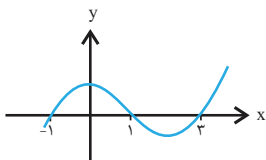
از طرفی ریشه‌های معادله $5x^2 - 7x + 3 = 0$ بر حسب α و β به صورت $\frac{2}{\alpha}$ و $\frac{2}{\beta}$ هستند. پس داریم:

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{7}{5} \rightarrow \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{5} \rightarrow \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{7}{5} \xrightarrow{(1)} \frac{2\left(\frac{-a}{3}\right)}{\frac{b}{3}} = \frac{7}{5} \rightarrow \frac{-2a}{b} = \frac{7}{5} \rightarrow 7b = -10a \quad (3)$$

$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{2}{\beta}\right) = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{b}{3}} \frac{4}{\frac{b}{3}} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{12}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow b = 20.$$

$$7b = -10a \xrightarrow{b=20} 140 = -10a \rightarrow a = -14$$

۲-۲- صفرهای تابع



به نمودار تابع f توجه کنید این تابع محور طول‌ها را در سه نقطه به طول‌های -1 و 1 و 3 قطع کرده است. در واقع $f(-1) = f(1) = f(3) = 0$ به این مقادیر از دامنه تابع که در آن‌ها $f(x) = 0$ است. صفرهای تابع f می‌گویند.

یادآوری: برای رسم تابع درجه دوم f با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ کافی است مختصات رأس سهمی را که طول آن $x = \frac{-b}{2a}$ است، پیدا کنیم. سپس دو نقطه اطراف رأس بدست می‌آوریم، از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تقریبی تابع درجه دوم بدست می‌آید.

مثال ۲۶: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس جواب‌های معادلات $f(x) = 0$ ، $g(x) = 0$ و $h(x) = 0$ را تعیین کنید.

الف $f(x) = x^2 + 1$

ب $g(x) = x^2 - 4x + 4$

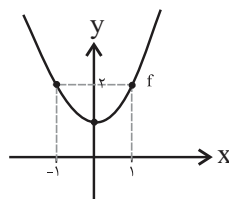
پ $h(x) = x^2 - 2x$

بیانیه:

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow \text{طول رأس سهمی } x = \frac{-b}{2a} \xrightarrow{a=1, b=0} x = 0 \rightarrow f(0) = 1$$

x	-1	0	1
$f(x) = x^2 + 1$	2	1	2
	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

\Rightarrow



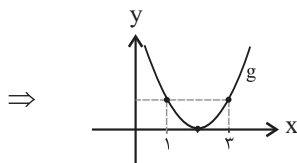
الف

با توجه به نمودار رسم شده این تابع محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. پس معادله $f(x) = 0$ جواب ندارد.

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 \xrightarrow{a=1, b=-4, c=4} x = \frac{-b}{2a} = \dots \Rightarrow y = \dots$$

ب

x	۱	۳
y	۱	۱

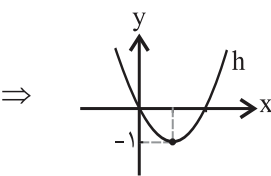


با توجه به نمودار رسم شده این تابع محور طولها را در قطع می کند. پس معادله $g(x) = 0$ دارای جواب به صورت $X = \dots$ است.

پ

$$h(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{a=1, b=-2, c=0} x = \frac{-b}{2a} = \dots \Rightarrow y = \dots$$

x	۰	۲
y

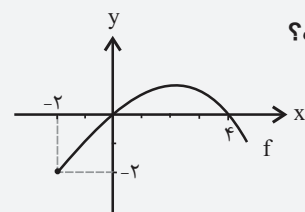


با توجه به نمودار رسم شده این تابع محور طولها را در قطع می کند. پس معادله $h(x) = 0$ دارای جواب به صورت $X = \dots$ و $X = \dots$ می باشد.

نکته: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد می توان آن را به صورت $f(x) = a(x - x')(x - x'')$ نیز نمایش داد.

انقباض:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - Sx + P) = a(x^2 - (x' + x'')x + (x'.x'')) = a(x - x')(x - x'')$$



مثال ۲۷: اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد. حاصل $a - 3b + 2c$ کدام است؟

$\frac{-6}{13}$ (۲)	$\frac{-6}{15}$ (۱)
$\frac{-13}{6}$ (۴)	$\frac{-15}{6}$ (۳)

بیان: با توجه به نمودار رسم شده واضح است که صفرهای تابع درجه دوم $x' = 0$ و $x'' = 4$ می باشد. (محل تلاقی نمودار f با محور X ها) پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = a(x - 0)(x - 4)$ می باشد. از طرفی نقطه $(-2, -2)$ روی نمودار f قرار دارد. پس داریم:

$$f(x) = a(x - 0)(x - 4) \xrightarrow{\substack{x=-2 \\ y=-2}} -2 = a(-2 - 0)(-2 - 4) \rightarrow -2 = 12a \rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}(x - 0)(x - 4) = -\frac{1}{6}x(x - 4) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x \rightarrow a = \dots, b = \dots, c = \dots \Rightarrow a - 3b + 2c = \dots$$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۲۸: حدود k را چنان بیابید تا صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = x^2 + x + k^2 - 1$ دو نقطه باشد.

بیان: برای آن که تابع درجه دوم $f(x) = x^2 + x + k^2 - 1$ دارای دو صفر باشد، باید معادله $x^2 + x + k^2 - 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی باشد. پس باید $\Delta > 0$ باشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(k^2 - 1) > 0 \rightarrow k^2 - 1 < \frac{1}{4} \rightarrow \dots$$

نکته ۲: اگر x_0 تنها صفر تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد می‌توان تابع f را به صورت $f(x) = a(x - x_0)^2$ نمایش داد که در آن $x_0 = \frac{-b}{2a}$ است.

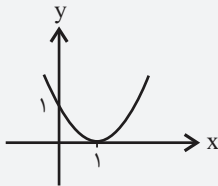
اشاره:

همان‌طور که می‌دانیم اگر x_0 تنها صفر تابع درجه دوم باشد باید $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$$

مثال ۲۹: اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد. حاصل $a - b + 2c$ کدام است؟



- (۱) -۵
- (۲) -۳
- (۳) ۵
- (۴) ۲

پاسخ:

باتوجه به نمودار، $x = 1$ تنها صفر تابع درجه دوم است. پس ضابطه f به صورت $y = a(x - 1)^2$ می‌گذرد. پس داریم:

$$y = a(x - 1)^2 \xrightarrow[y=1]{x=0} \dots = a(\dots - 1)^2 \rightarrow a = \dots$$

پس $y = \dots$ می‌باشد. بنابراین $a = \dots$ و $b = \dots$ و $c = \dots$ است.

$$\Rightarrow a - b + 2c = \dots$$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۳۰: اگر تابع $f(x) = ax^2 + x + 1$ فقط یک صفر داشته باشد. مقدار a چقدر است؟

پاسخ: تابع f هنگامی تنها یک صفر دارد که Δ معادله $ax^2 + x + 1 = 0$ برابر با صفر شود:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(\dots)(1) = \dots \xrightarrow{\Delta=0} \dots = 0 \rightarrow a = \dots$$

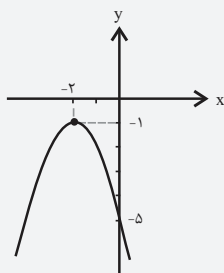
مثال ۳۱: اگر $x = 2$ تنها صفر تابع $f(x) = ax^2 - x + b$ باشد، مقدار a و b را بیابید.

پاسخ: چون $x = 2$ تنها صفر تابع درجه دوم f است. می‌توان آن را به صورت $f(x) = a(x - 2)^2$ نوشت پس داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 = ax^2 - x + b \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

نکته ۳: هرگاه مختصات رأس سهمی با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت $S(x_0, y_0)$ باشد، ضابطه آن را می‌توان به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ نمایش داد.

مثال ۳۲: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. مقادیر a ، b و c را تعیین کنید.



پاسخ: با توجه به نمودار رسم شده رأس سهمی به مختصات $(-2, -1)$ می‌باشد پس ضابطه f به صورت $f(x) = a(x - (-2))^2 + (-1)$

می‌باشد. بنابراین داریم:

$$f(x) = a(x + 2)^2 - 1$$

$$-5 = a(0 + 2)^2 - 1 \rightarrow 4a = -4 \rightarrow a = -1$$

از طرفی تابع محور عرض‌ها را در $(0, -5)$ قطع می‌کند پس:

بنابراین:

$$f(x) = -1(x + 2)^2 + (-1) \Rightarrow f(x) = -x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases}$$

تکلیف ۴: فرض کنید x' و x'' صف‌های تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند.

الف) در صورتی عدد α بین صف‌های تابع قرار دارد ($x' < \alpha < x''$) که $af(\alpha) < 0$

ب) در صورتی عدد α از هر دو ریشه بزرگتر است ($x' < x'' < \alpha$) که اولاً $af(\alpha) > 0$ ثانیاً $\alpha > \frac{-b}{2a}$ باشد.

ب) در صورتی عدد α از هر دو ریشه کوچکتر است ($\alpha < x' < x''$) که اولاً $af(\alpha) > 0$ ثانیاً $\alpha < \frac{-b}{2a}$ باشد.

مثال ۳۳: تابع درجه دوم $f(x) = 2x^2 - x - m$ مفروض است. حدود m را چنان بیابید که صف‌های تابع هر دو کوچکتر از ۱ باشند.

پاسخ: سه مرحله زیر را باید انجام دهیم:

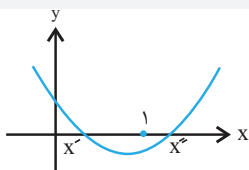
$$(1): \Delta > 0 \rightarrow \frac{a=2, b=-1, c=-m}{c=-m} \rightarrow (\dots)^2 - 4(\dots)(\dots) > 0 \rightarrow m > \dots$$

$$(2): af(1) > 0 \rightarrow \frac{a=2}{f(1)=\dots} \rightarrow \dots > 0 \rightarrow m < \dots$$

$$(3): \frac{-b}{2a} < 1 \rightarrow \frac{a=2}{b=-1} \rightarrow \dots < 1$$
 همواره برقرار است

حال اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم داریم:

مثال ۳۴: حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع $f(x) = x^2 + mx + 1$ به صورت زیر باشد.



پاسخ: با توجه به نمودار رسم شده واضح است که عدد ۱ بین دو ریشه قرار دارد پس دو مرحله زیر را بررسی می‌کنیم:

$$(1): \Delta > 0 \rightarrow \frac{a=1, b=m, c=1}{c=1} \rightarrow \Delta = \dots > 0 \rightarrow m > \dots \text{ یا } m < \dots$$

$$(۲): af(۱) < 0 \xrightarrow{a=....., f(۱)=.....} \dots\dots\dots < 0 \rightarrow m < \dots\dots\dots$$

با اشتراک دو بازه بدست آمده می‌توان محدوده m را بدست آورد:

تعیین علامت صفرهای تابع درجه دوم به کمک ضرایب

فرض کنید x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد با مشخص کردن علامت S و P می‌توان علامت صفرهای تابع درجه دوم را مشخص کرد.

نکات:

- ☑ در صورتی نمودار تابع درجه دوم محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند که: $\Delta > 0$, $S > 0$, $P > 0$
- ☑ در صورتی نمودار تابع درجه دوم محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های منفی قطع می‌کند که: $\Delta > 0$, $S < 0$, $P > 0$
- ☑ در تابع درجه دوم f در صورتی $f(x) = 0$ دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است که $P < 0$
- ☑ در تابع درجه دوم f ، در صورتی $f(x) = 0$ دارای دو ریشه هم علامت است که $\Delta > 0$, $P > 0$

مثال ۳۵: به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x را در دو نقطه با طول‌های منفی قطع می‌کند.

(سراسری - ریاضی ۹۳)

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

پاسخ:

$$(۱): \Delta > 0 \rightarrow \Delta = (\dots\dots)^2 - 4(\dots\dots)(\dots\dots) = a^2 + 6a + 9 + 4a = \dots\dots\dots \rightarrow \Delta a^2 + 10a + 9 > 0$$

جدول تعیین علامت $\rightarrow a < \dots\dots$ یا $a > \dots\dots$

$$(۲): S < 0 \xrightarrow{S = \frac{-b}{a}} \dots\dots\dots < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} a > \dots\dots \text{ یا } a < \dots\dots$$

$$(۳): P > 0 \xrightarrow{P = \frac{c}{a}} \frac{-1}{a} > 0 \rightarrow a < \dots\dots$$

با اشتراک از سه بازه‌ی بالا داریم

مثال ۳۶: تابع $f(x) = x^2 + (m-2)x + m - 4$ مفروض است. در چه صورتی ریشه‌های $f(x) = 0$ مختلف‌العلامه‌اند.

هنگامی ریشه‌های معادله داده شده مختلف‌العلامه هستند که $P < 0$ باشد. پس داریم:

$$P = \frac{c}{a} \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \frac{c=.....}{a=.....} < 0 \rightarrow m < \dots\dots$$

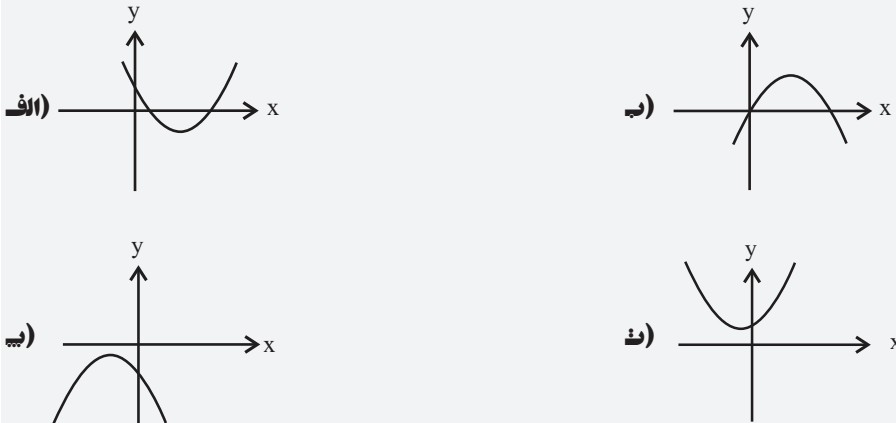
تذکره: برای پیدا کردن علامت ضرایب تابع درجه دوم به کمک نمودار آن قدم‌های زیر را بر می‌داریم:

قدم اول: محل برخورد تابع با محور عرض‌ها علامت C را مشخص می‌کند.

قدم دوم: گودی منحنی \cup یا \cap علامت a را مشخص می‌کند.

قدم سوم: علامت طول رأس سهمی $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ، علامت b را مشخص می‌کند.

مسئله ۳۷: هر یک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. علامت ضرایب این توابع را بیابید.



پاسخ:

- الف** گودی به سمت بالاست پس $a > 0$ است و محور عرضها را در قسمت مثبت قطع می کند پس $c > 0$ ، همچنین علامت طول رأس سهمی مثبت است. پس $\frac{-b}{2a} > 0$ و چون $a > 0$ پس $b < 0$ است.
- ب** گودی به سمت پایین است پس..... است و محور عرضها را در مبدأ قطع می کند. پس $c = 0$ است و همچنین علامت طول رأس سهمی..... است. پس $\frac{-b}{2a} > 0$ و چون..... پس..... است.
- پ** گودی سهمی رو به پایین است پس..... است و چون نمودار تابع محور عرضها را در قسمت..... قطع کرده پس است. از طرفی علامت طول رأس سهمی منفی است پس $\frac{-b}{2a} < 0$ و چون..... پس..... می باشد.
- ت** گودی سهمی رو به است پس..... است و چون نمودار تابع محور عرضها را در قسمت..... قطع می کند پس می باشد. از طرفی علامت طول رأس سهمی است پس..... می باشد و چون..... پس..... است.

تکنه: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ علامت شیب خط مماس در نقطه برخورد منحنی با محور عرضها با علامت b یکسان است.

مسئله ۳۸: اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد. مقدار k و صفرهای دیگر تابع را بیابید.

پاسخ:

$x = -2$ یکی از صفرهای تابع است پس اگر در تابع به جای X ، -2 را قرار دهیم مقدار آن برابر با صفر می شود.

$$f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2 \xrightarrow{x=-2} (-2)^3 + k(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 \rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \rightarrow k = \dots\dots$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ، چون $f(-2) = 0$ پس این تابع بر $x + 2$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ - \quad \underline{x+2} \\ x^3 + 2x^2 \\ - \quad \underline{-x-2} \\ -x-2 \\ - \quad \underline{-x-2} \\ 0 \end{array} \Rightarrow f(x) = (x+2)(x^2-1)$$

بنابراین صفرهای دیگر این تابع برابر $x = \pm 1$ است.

حل برخی از معادلات به کمک معادله درجه دوم

برخی از معادلات را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر به کمک معادله درجه دوم حل کرد.

مثال ۳۹: هر یک از معادلات زیر را به معادله درجه دوم تبدیل و آن‌ها را حل کنید.

الف $x^6 + 5x^3 - 6 = 0$

ب $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$

پ $(x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + 3x = 1$

پاسخ:

الف اگر در معادله داده شده $x^3 = A$ بگیریم داریم:

$$(x^3)^2 + 5x^3 - 6 = 0 \rightarrow A^2 + 5A - 6 = 0 \rightarrow (A+6)(A-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -6 \\ A = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 = -6 \rightarrow x = -\sqrt[3]{6} \\ x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

ب اگر در معادله داده شده $(x^2 - 1)^2 = A$ بگیریم داریم:

$$A^2 + A - 2 = 0 \rightarrow (A+2)(A-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^2 = -2 & \text{غیرقابل قبول} \\ (x^2 - 1)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = -1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

پ اگر $x^2 + x + 1 = A$ در نظر بگیریم داریم:

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + 3x + 3 - 3 = 1 \rightarrow (x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + x + 1) - 3 - 1 = 0 \rightarrow A^2 + 3A - 4 = 0$$

$$\rightarrow (A+4)(A-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = -4 \rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow \Delta = \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases} \\ x^2 + x + 1 = 1 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \end{cases}$$

مثال ۴۰: حدود m را چنان بیابید که معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی باشد.

پاسخ: اگر $x^2 = A$ در نظر بگیریم داریم:

$$A^2 - (m+2)A + (m+5) = 0$$

برای آن که معادله داده شده دارای چهار ریشه حقیقی باشد باید معادله فوق دو ریشه متمایز مثبت داشته باشد. بنابراین سه مرحله زیر را بررسی می‌کنیم:

(۱): $\Delta > 0 \rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0 \rightarrow m^2 > 16 \rightarrow m > 4$ یا $m < -4$

(۲): $S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} \rightarrow \frac{m+2}{1} > 0 \rightarrow m > \dots$

(۳): $P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} \rightarrow \frac{m+5}{1} > 0 \rightarrow m > \dots$

با اشتراک از ۳ بازه بالا داریم:

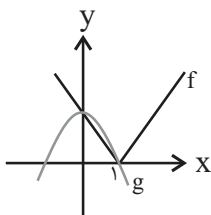
۲-۳- روش هندسی حل معادلات

 توابع f و g با ضابطه‌های زیر مفروضند:

$$g(x) = 1 - x^2$$

$$f(x) = |x - 1|$$

الف هر یک از نمودارهای فوق را رسم کنید.



ب این دو تابع همدیگر را در چند نقطه قطع کرده‌اند.

در دو نقطه

ب نقاطی از این دو تابع بیابید که عرض آن‌ها یکسان است؟

 $(1, 0), (0, 1)$

 ت چه ارتباطی بین معادله $f(x) = g(x)$ و نقاط برخورد دو تابع وجود دارد؟

 جواب معادله $f(x) = g(x)$ در واقع همان طول نقاط برخورد دو تابع می‌باشد.

نتیجه

 یکی از روش‌های حل معادله $f(x) = g(x)$ که به کمک آن تعداد و مقدار تقریبی (گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است. روش

 هندسی (نموداری) حل معادلات می‌باشد. بدین ترتیب که نمودارهای توابع f و g را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. طول نقاط محل تلاقی، جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.


نمرینان:

- ۱- اگر مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - (a+3)x + 3a = 0$ مساوی ۴ باشد. حاصل ضرب ریشه‌ها چقدر است؟
- ۲- به ازای چه مقدار m دو ریشه معادله $3x^2 + 11x - 2m = 7$ عکس و قرینه هم‌اند.
- ۳- در معادله $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$ حاصل $x_1^6 + x_2^6$ چقدر است؟
- ۴- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m چقدر است؟
- ۵- به ازای چه مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های معادله $2x^2 + (m-1)x = 1$ برابر $\frac{13}{4}$ است.
- ۶- اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $4a + 2b = c$ و $9a + 3b + c = 0$ مجموع ریشه‌های این معادله چقدر است؟
- ۷- اگر در معادله درجه دوم $x^2 + 2ax + 3a + 1 = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها از مجموع ریشه‌ها، ۴ واحد کمتر باشد. مجموع مربعات ریشه‌ها چقدر است؟
- ۸- اگر معادله درجه دوم $x^2 - 4x + k = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، ثابت کنید $P < 4$.
- ۹- اگر به هر یک از جواب‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ یک واحد اضافه کنیم به حاصل ضرب آن چقدر اضافه می‌شود؟
- ۱۰- در معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل $x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2$ چقدر است؟
- ۱۱- جواب‌های معادله $(\sqrt{2}+1)x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 = 0$ را بدون حل مشخص کنید.
- ۱۲- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله مثبت و یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 5mx + 16 = 0$ مکعب ریشه دیگر باشد.
- ۱۳- اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد. حاصل $x'^4x'' + x''^4x'$ چقدر است؟
- ۱۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 4 = 0$ باشد. حاصل $(x_1^2 - 3x_1)^3 + (x_2^2 - 3x_2)^3$ چقدر است؟
- ۱۵- اگر $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشد حاصل $(x+2)^4 + 1$ چقدر است؟
- ۱۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - bx + 1 = 0$ برابر $\sqrt{3} - 2$ باشد، ریشه دیگر چقدر است؟
- ۱۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + 2 = 0$ باشد. حاصل $\frac{\alpha^3\beta^2}{5\alpha+2} + \frac{\beta^3\alpha^2}{5\beta+2}$ چقدر است؟
- ۱۸- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشد. حاصل $A = (\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2$ چقدر است؟
- ۱۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشد. حاصل $\alpha^3 + 14\beta$ چقدر است؟
- ۲۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 1 = 0$ باشد. حاصل $\alpha\beta^{-2} + \beta\alpha^{-2}$ چقدر است؟
- ۲۱- معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{1/5} + \sqrt{2}$ و $\sqrt{1/5} - \sqrt{2}$ است. به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ نشان دهید a, b, c هر سه صحیح‌اند.
- ۲۲- اگر بین ریشه‌های معادله $x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0$ رابطه $3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0$ برقرار باشد، مقدار m چقدر است؟

۲۳- معادله درجه دومی را بنویسید که بین ریشه‌های آن رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۲۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ و $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$ ریشه‌های $x^2 + kx - 8 = 0$ باشند، مقدار k چقدر است؟

۲۵- معادله‌ای را بیابید که جواب‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x - 4 = 0$ باشد.

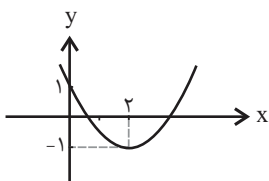
۲۶- معادله درجه دومی را بیابید که ریشه‌های آن 5 برابر ریشه‌های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشد.

۲۷- ریشه‌های معادله $x^2 - bx + c = 0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ است. b کدام است؟

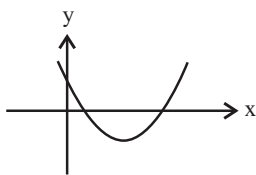
۲۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + kx + 1 = 0$ باشند به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ است.

۲۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد. معادله درجه دومی را بیابید که ریشه‌های آن $\frac{\alpha^2 - 2\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta^2 - 2\beta}{\alpha}$ باشد.

۳۰- با توجه به نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ ضرایب a, b, c را تعیین کنید.



۳۱- در شکل زیر سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a, b, c و تعداد صفرهای $f(x) = 0$ را تعیین کنید.

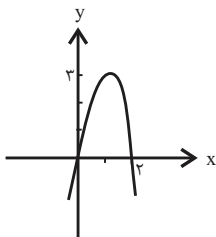


۳۲- بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید.

۳۳- صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، 3 و 1 می‌باشد و تابع محور عرض‌ها را در 6 قطع کرده است، کمترین مقدار y را بیابید.

۳۴- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (m-2)x^2 + 3x + m+2$ ، صفر باشد، m چقدر است؟

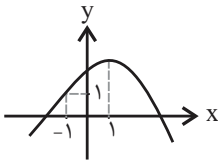
۳۵- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت روبه‌رو است. مقادیر a, b, c را بیابید.



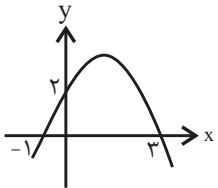
۳۶- مقدار m را چنان بیابید که نمودار تابع $y = x(2x + m - 1) + 1$ فقط یک صفر داشته باشد.

۳۷- حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع $y = (m + 2)x^2 + 4x + m - 1$ دو صفر داشته باشد.

۳۸- در سهمی شکل روبه‌رو به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ اگر $a - b = -3$ باشد آن‌گاه $f(1)$ را بیابید.



۳۹- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت روبه‌رو است. مختصات رأس سهمی را بیابید.



۴۰- به ازای چند مقدار صحیح a تابع $f(x) = ax^2 + 2(a + 2)x + 2a + 7$ حداقل یک صفر دارد.

۴۱- اگر قدرمطلق تفاضل صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = -x^2 + x + m$ برابر ۳ باشد. بیش‌ترین مقدار تابع چقدر است؟

۴۲- محور تقارن سهمی $f(x) = ax^2 + 4x + k$ منحنی را در دو نقطه به عرض -2 قطع می‌کند. فاصله بین صفرهای تابع چقدر است؟

۴۳- در تابع $f(x) = x^2 - mx + m = 0$ حدود m را چنان بیابید که $f(x) = 0$ فاقد ریشه باشد.

۴۴- اگر مساحت مثلثی که دو رأس آن روی صفرهای تابع $y = x^2 - kx + 1$ و رأس دیگر محل برخورد تابع با محور عرض‌ها است، برابر ۱ باشد، مقدار k چقدر است؟

۴۵- اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 - (a - 4)x + \frac{9}{4}$ فقط از ناحیه چهارم عبور نکند، حدود a را بیابید.

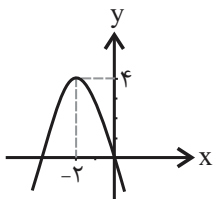
۴۶- اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^2 + x + k^2 - 1$ صفر باشد، صفر دیگر چقدر است؟

۴۷- حدود m را چنان بیابید تا هیچ نقطه‌ای از تابع $f(x) = x^2 - 4x + m$ دارای فاصله ۵ از محور طول‌ها نباشد.

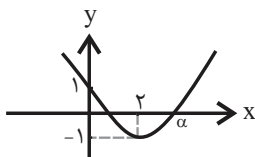
۴۸- حدود a را چنان بیابید که تابع درجه دوم $f(x) = (a - 1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (a + 1)$ از ناحیه سوم و چهارم عبور نکند.

۴۹- اگر $2\alpha + 1$ و $2\beta + 1$ صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = 2x(x + 2) - 3$ باشد. تابعی را بیابید که صفرهای آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۵۰- با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ مقدار a چقدر است؟



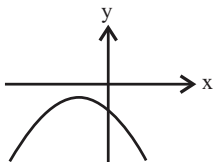
۵۱- با توجه به نمودار تابع درجه دوم زیر مقدار α چقدر است؟



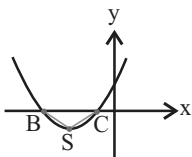
۵۲- اگر α و β صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 4x - 1$ باشد. حاصل عبارت زیر را بدون محاسبه S و P و مقادیر α و β تعیین کنید.

$$A = \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

۵۳- حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع $y = mx^2 - 4\sqrt{2}x + m - 2$ به صورت زیر باشد:



۵۴- نمودار تابع $y = 5x^2 + 12x + a$ به صورت زیر است. اگر مثلث SBC در رأس S قائمه باشد، مقدار a چقدر است؟



۵۵- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 8$ را باید حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کرد تا صفرهای تابع هر دو منفی شود.

۵۶- در صورتی که منحنی تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{4}$ محور طولها را در طرفین محور y ها قطع کند حدود a را بیابید.

۵۷- اگر در تابع $f(x) = 2x^2 + bx + 6$ ، فقط یک ریشه مثبت داشته باشد، b چقدر است؟

۵۸- علامت ریشه‌های $0 = -6x^2 + 2x + k^2 + 3$ را بدون حل معادله تعیین کنید.

۵۹- به ازای کدام مقادیر m معادله درجه دوم $0 = (m^2 + 1)x^2 - 3mx + m - 2$ دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.

۶۰- به ازای جميع مقادیر مختلف k ، علامت ریشه‌های معادله $0 = (k^2 + 1)x^2 - (k+1)x - 1$ را بدون تعیین ریشه‌ها مشخص کنید.

۶۱- کدامیک از توابع زیر به ازای جميع مقادیر k محور طولها را در دو نقطه با طول منفی قطع می‌کند.

$$f(x) = x^2 + kx + k^2 + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = x^2 + (k+1)x + k - 2 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 - (k^2 + 1)x + k^2 \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 + (k^2 + 3)x + k^2 + 2 \quad (4)$$

۶۲- حدود m را چنان بیابید که تابع $f(x) = x^2 - x + m$ محور طولها را در دو نقطه یا طولهای مثبت قطع کند.

۶۳- به ازای جميع مقادیر مختلف k علامت ریشه‌های معادله $0 = (-x-1)(x-3) + 2 + k^2$ را تعیین کنید.

۶۴- معادله زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$$

۶۵- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله زیر را بیابید.

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

۶۶- ریشه‌های معادله $0 = x^4 - 36x^2 + 49$ را بیابید.

۶۷- معادله $x^4 + 3x^2 = \sqrt{m-1} + 2$ دارای چند ریشه حقیقی است.

۶۸- حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله $1 = x^2 + 3x + (x^2 + 3x + 1)^2$ چقدر است؟

۶۹- معادله $144 = (x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۷۰- معادله $(x+2)(x^2+1)(x-2)=1$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۷۱- حدود b را چنان بیابید که معادله $2x^4 + bx^2 - bx - 2$ فقط دو ریشه حقیقی داشته باشد.

۷۲- به ازای کدام مقادیر a معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است.

۷۳- اگر در تجزیه $6 - ax - 2x^2 + x^3 = f(x)$ ، $(x-2)$ وجود داشته باشد، تمام صفرهای تابع $f(x)$ را بیابید.

۷۴- نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط $y = -2x + b$ در نقطه‌ای به طول یک، یکدیگر را روی محور طولها قطع می‌کنند حاصل ضرب طول دو نقطه تقاطع دیگر را بیابید.

۷۵- اگر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند. صفرهای دیگر تابع $f(x)$ را بیابید.

۷۶- تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلات زیر را به روش هندسی بدست آورید.

الف $|x|=1$

ب $x^2 + |x-2| = 4x + 2$

پ $\frac{1}{x} = x - 2$

ت $|x| = x - 2$



تست‌های درس دوم (معادلات درجه دوم)

۲۹- به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = 2x - 4$ بر منحنی به معادله $y = (m+3)x^2 + mx$ مماس است؟ (سراسری-ریاضی ۹۰)

(۱) ۱۸ و ۲- (۲) ۲۲ و ۲- (۳) ۲۲ و ۲ (۴) ۱۱ و ۴

۳۰- اگر α, β ریشه‌های معادله $x(\Delta x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟ (سراسری-ریاضی ۹۰)

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۳۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری-ریاضی ۹۲)

(۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۳۲- اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟ (سراسری-ریاضی ۹۲)

(۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۳۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟ (سراسری-ریاضی ۹۵)

(۱) $m > 2$ (۲) $-1 < m < 2$ (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m

۳۴- به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟ (سراسری-ریاضی ۹۶)

(۱) $-2 < a < 2$ (۲) $2 < a < 5$ (۳) $2 < a < 14$ (۴) $5 < a < 14$

۳۵- به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟ (سراسری-ریاضی ۹۶)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶۱۴

۳۶- اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\left\{ \alpha^2\beta, \alpha\beta^2 \right\}$ است؟ (سراسری خارج-ریاضی ۹۰)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۳۷- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری خارج-ریاضی ۹۱)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۳۸- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (سراسری خارج-ریاضی ۹۱)

(۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸

۳۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+2)x - 1$ ، محور X ها را در دو نقطه به طولهای منفی قطع می‌کند؟

(سراسری قارج- ریاضی ۹۲)

$$a < -9 \quad (1) \quad a < -3 \quad (2) \quad a > -1 \quad (3) \quad -3 < a < 0 \quad (4)$$

۴۰- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، منحنی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور X ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

(سراسری قارج- ریاضی ۹۵)

$$m > 1 \quad \text{یا} \quad m < -2 \quad (1) \quad -2 < m < 1 \quad (2) \quad m < -2 \quad (3) \quad \text{فقط} \quad m > 1 \quad (4)$$

۴۱- به ازای کدام مقدار m هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟

(سراسری قارج- ریاضی ۹۶)

$$9 \quad (1) \quad 11 \quad (2) \quad 13 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۴۲- کدام یک از معادلات زیر یکی از ریشه‌هایش $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ می‌باشد؟

$$x^4 + 1 \cdot x^2 + 1 = 0 \quad (1) \quad x^4 - 1 \cdot x^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^4 - 1 \cdot x^2 + 1 = 0 \quad (3) \quad x^4 + 1 \cdot x^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۴۳- کدام یک از معادلات زیر ریشه‌هایش ۲ واحد از ریشه‌های معادله $x^2 + mx - m - 1 = 0$ کمتر است؟

$$x^2 - (m+4)x + m + 3 = 0 \quad (1) \quad x^2 + (m+4)x - m - 3 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + (m+4)x + m + 3 = 0 \quad (3) \quad x^2 - (m+4)x - m - 3 = 0 \quad (4)$$

۴۴- دو برابر عددی از عدد دیگر شش واحد بیشتر است. اگر حاصل ضرب آنها کمترین باشد، قدر مطلق تفاضل دو عدد کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

$$\frac{7}{2} \quad (1) \quad \frac{9}{2} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad \frac{5}{2} \quad (4)$$

۴۵- اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2} + \frac{1}{\beta^3 + 3\beta^2 + 2}$ کدام است؟ (گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

$$-\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4)$$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۴۶- کدام یک از معادلات زیر ریشه‌هایش از مربع ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، ۱ واحد کمتر است؟

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \quad (1) \quad x^2 + 5x - 5 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 5x + 5 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 5x - 5 = 0 \quad (4)$$

۴۷- ریشه‌های معادله $2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ ، عکس ریشه‌های معادله $cx^3 + dx^2 - 9x + 6 = 0$ می‌باشد. حاصل $\frac{a+b}{c+d}$ کدام است؟ ($ab \neq 0$)

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۴۸- اگر α, β ریشه‌های $2x(2-x) = -3$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت $\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2}$ می‌باشد؟

$$9x^2 - 28x - 4 = 0 \quad (1) \quad 9x^2 - 28x + 4 = 0 \quad (2) \quad 9x^2 + 28x - 4 = 0 \quad (3) \quad 9x^2 + 28x + 4 = 0 \quad (4)$$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۴۹- اگر $4x + 3y = 7$ باشد، کمترین مقدار $x^2 + y^2$ چه عددی است؟

(۱) $\frac{25}{48}$ (۲) $\frac{48}{25}$ (۳) $\frac{49}{25}$ (۴) $\frac{25}{49}$

۵۰- اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 1 = 0$ و $\frac{2\alpha}{\beta}$ و $\frac{2\beta}{\alpha}$ ریشه‌های معادله $x^2 + kx + 4 = 0$ باشند، مقدار k کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

(۱) $-\frac{14}{3}$ (۲) $-\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{14}{3}$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

۵۱- ریشه‌های حقیقی معادله $ax^2 + 5x + a = 6$ معکوس یکدیگرند. اختلاف این دو ریشه کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۲

(گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

۵۲- اگر $2\alpha + 1$ و $2\beta + 1$ ریشه‌های معادله $2x(x+2) = 3$ باشند، کدام معادله ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است؟

(۱) $8x^2 + x - 3 = 0$ (۲) $8x^2 - x - 3 = 0$ (۳) $3x^2 + 16x + 8 = 0$ (۴) $3x^2 - 16x + 8 = 0$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۶)

۵۳- اگر به هر یک از ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - k = 0$ دو واحد اضافه کنیم به حاصل ضرب آن‌ها چقدر اضافه می‌شود؟

(۱) -۱۸ (۲) ۱۸ (۳) -۹ (۴) ۹

(سپیش- ریاضی ۹۱)

۵۴- به ازای کدام مقادیر a هر دو نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^2 + ax$ و $y = ax^2 - x + 2$ در ناحیه اول هستند؟

(۱) $a < 1$ (۲) $a > 1$ (۳) $-1 < a < 2$ (۴) $-2 < a < 1$

(سپیش- ریاضی ۹۱)

۵۵- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم $mx^2 + 5x + m = 6$ معکوس هم‌اند؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

(سپیش- ریاضی ۹۱)

۵۶- معادله $x^6 + m(x^2 + 3) = m^2 - 2x^2$ به ازای کدام مجموعه مقادیر m دو جواب حقیقی دارد؟

(۱) $m > 3$ یا $m < 0$ (۲) $0 < m < 3$ (۳) $-2 < m < 3$ (۴) $3 < m < 5$

(سپیش- ریاضی ۹۱)

۵۷- در معادله درجه دوم $2x^2 - 5x + m = 1$ به ازای کدام مقدار m مجموع مکعب‌های دو ریشه حقیقی برابر ۵ است؟

(۱) $\frac{23}{6}$ (۲) $\frac{17}{6}$ (۳) $\frac{17}{12}$ (۴) $\frac{29}{12}$

(سپیش- ریاضی ۹۱)

۵۸- به ازای کدام مقدار m منحنی $y = x^2 - (2m+1)x + m^2 - 4$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

(۱) $-\frac{1}{2} < m < 2$ (۲) $m < -\frac{1}{2}$ (۳) $-2 < m < 2$ (۴) $m > 2$

۵۹- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x = m$ دو واحد از ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 1 = 0$ کمتر است؟

(سپیش- ریاضی ۹۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰- به ازای کدام مقدار a قدر مطلق تفاضل جذر ریشه‌های معادله $2x^2 - (a+1)x + 2a = 0$ برابر $\sqrt{3}$ است؟

(سپیش- ریاضی ۹۲)

(۱) ۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۲۵

۶۱- به ازای کدام مقادیر m معادله $\frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + m = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟ (سنجش - ریاضی ۹۳)

(۱) $-1 < m < 1$ (۲) $-\frac{1}{2} < m < 1$ (۳) $\frac{1}{2} < m < 5$ (۴) $m > 5$

۶۲- به ازای کدام مقدار a کمترین مقدار تابع $y = x^2 + ax + a^2 - 12$ روی محور x ها است؟ (سنجش - ریاضی ۹۳)

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ± 4 (۴) $\pm 2\sqrt{3}$

۶۳- به ازای کدام مقدار a در معادله درجه دوم $9x^2 - 25ax + 4a = 0$ قدر مطلق تفاضل جذر ریشه‌ها برابر $\frac{1}{6}$ است؟ (سنجش - ریاضی ۹۳)

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۴- اگر ریشه‌های حقیقی معادله $5x^4 - 42x^2 = 27$ برابر x_1 و x_2 باشند مجموعه ریشه‌های کدام معادله به صورت

(سنجش - ریاضی ۹۴) $\left\{ \frac{1}{2}x_1 + 1, \frac{1}{2}x_2 + 1 \right\}$ است؟

(۱) $2x^2 - 4x = 3$ (۲) $4x^2 - 8x = 5$ (۳) $4x^2 + 8x = 5$ (۴) $2x^2 + 4x = 7$

۶۵- به ازای کدام مقادیر m معادله $x^3 + 3x^2 + (m-6)x - m + 2 = 0$ دارای دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت است؟ (سنجش - ریاضی ۹۴)

(۱) $m > 2$ (۲) $-2 < m < 6$ (۳) $2 < m < 6$ (۴) $1 < m < 2$

۶۶- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند؟

(سنجش - ریاضی ۹۴)

(۱) $a < 0$ (۲) $a < \frac{2}{3}$ (۳) $2 < a < 6$ (۴) هیچ مقدار a

۶۷- معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + m - 1 = 0$ ، به ازای کدام مقادیر m ، دو ریشه منفی دارد؟ (سنجش - ریاضی ۹۵)

(۱) $-2 < m < 1$ (۲) $-3 < m < 2$ (۳) $-3 < m < -2$ (۴) $1 < m < 2$

۶۸- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{2}{6}x^2 - 13(\frac{2}{6})x + 6(\frac{2}{6}) = 0$ کدام است؟ (سنجش - ریاضی ۹۵)

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۴ (۴) ۴

۶۹- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟ (سنجش - ریاضی ۹۵)

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۷۰- به ازای کدام مقادیر m ، معادله $(m+2)x^2 - 4x + (m+2) = 0$ دو ریشه در فاصله $(0, 2)$ دارد؟ (سنجش - ریاضی ۹۵)

(۱) $-1 < m < -\frac{2}{5}$ (۲) $-4 < m < 0$ (۳) $-\frac{2}{5} < m < 0$ (۴) $-4 < m < -2$

۷۱- به ازای چه مقادیری از a معادله $3x + a = |3x + 1|$ جواب ندارد؟

(۱) $a < 1$ (۲) $a > -1$ (۳) $a < 3$ (۴) $a > 1$

۷۲- تعداد جواب‌های معادله $x^2 + |x - 1| = 2x$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴) ۱

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

۱-۳- معادلات شامل عبارات گویا

شخصی به ازای ۶۰/۰۰۰ تومان مقداری پارچه خرید اگر با همین مبلغ ۳ متر پارچه بیشتر گرفته بود. قیمت هر متر ۱۰۰۰ تومان کمتر می‌شد معادله‌ای تشکیل دهید که به کمک آن طول پارچه بر حسب متر بدست آید و سپس آن را حل کنید.

$$\frac{\text{کل پارچه خریده شده}}{\text{مبلغ پرداختی}} = \frac{X \text{ متر}}{۶۰۰۰۰} = \frac{۱ \text{ متر}}{\square} \Rightarrow \square = \frac{۶۰۰۰۰}{X}$$

$$\text{قیمت هر متر پارچه در مرتبه دوم} \Delta = \frac{۶۰۰۰۰}{X+۳} = \frac{۱ \text{ متر}}{\Delta} \Rightarrow \Delta = \frac{۶۰۰۰۰}{X+۳}$$

با توجه به فرض مسئله قیمت هر متر پارچه در مرتبه اول ۱۰۰۰ تومان بیشتر از قیمت هر متر پارچه در مرتبه دوم است بنابراین:

$$\square - \Delta = ۱۰۰۰ \Rightarrow \frac{۶۰۰۰۰}{X} - \frac{۶۰۰۰۰}{X+۳} = ۱۰۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰۰} \frac{۶۰}{X} - \frac{۶۰}{X+۳} = ۱$$

اگر به معادله بدست آمده توجه کنید این معادله یک تساوی از عبارتهای گویا است به همین دلیل به این گونه معادلات، معادلات گویا گفته می‌شود.

تکنه: برای حل معادلات گویا کافی است طرفین را در ک.م.م.م.م. ضرب کنیم. معمولاً بعد از ضرب، معادله به یک معادله چند جمله‌ای از درجات ۱ یا ۲ تبدیل می‌شود.

تذکره ۱: اگر برخی از جوابهای معادله با شرایط مسئله در محیط پیرامون مطابقت نداشته باشد این جواب قابل قبول نیست.

$$\frac{۶۰}{X} - \frac{۶۰}{X+۳} = ۱ \xrightarrow{\text{باضرب طرفین در ک.م.م.م.م.ها}} \frac{۶۰}{X} \times \frac{X(X+۳)}{X(X+۳)} - \frac{۶۰}{X+۳} \times \frac{X(X+۳)}{X(X+۳)} = \frac{۶۰}{X(X+۳)} \times X(X+۳)$$

$$\rightarrow \cancel{۶۰}X + ۱۸۰ - \cancel{۶۰}X = X^2 + ۳X$$

$$\rightarrow X^2 + ۳X - ۱۸۰ = 0 \rightarrow (X+۱۵)(X-۱۲) = 0 \rightarrow \begin{cases} X+۱۵ = 0 \rightarrow X = -۱۵ \text{ (با شرایط مسئله مطابق نیست)} \\ X-۱۲ = 0 \rightarrow X = ۱۲ \end{cases}$$

بنابراین شخص ۱۲ متر پارچه خریده است.

تذکره ۲: جوابهای بدست آمده در معادلات گویا نباید مخرج کسره‌های اولیه را صفر کند.

مثال ۱: معادله $\frac{۱}{X-۱} + \frac{۱}{X+۱} = \frac{X^2+۱}{X^2-۱}$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} X-۱ = (X-۱) \\ X+۱ = (X+۱) \\ X^2-۱ = (X-۱)(X+۱) \end{cases} \xrightarrow{\text{ک.م.م.م.م.ها}} (X-۱)(X+۱)$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \xrightarrow{\times(x-1)(x+1)} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow (x+1) + (x-1) = x^2+1 \rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1 \text{ غیر قابل قبول}$$

تذکر: هرگاه در معادلات کسری، دو کسر مساوی هم شوند. اگر مخرج‌ها یکسان است صورت‌ها را مساوی هم قرار دهید.

مثال ۲: معادله $\frac{2}{2x-1} + \frac{x}{x-2} = \frac{-3}{2x^2-5x+2}$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ:

$$\frac{2}{2x-1} + \frac{x}{x-2} = \frac{2(x-2)+x(2x-1)}{2x^2-5x+2} = \frac{2x-4+2x^2-x}{2x^2-5x+2} = \frac{2x^2+x-4}{2x^2-5x+2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{2}{2x-1} + \frac{x}{x-2} = \frac{-3}{2x^2-5x+2} \rightarrow \frac{2x^2+x-4}{2x^2-5x+2} = \frac{-3}{2x^2-5x+2} \rightarrow 2x^2+x-4 = -3 \rightarrow 2x^2+x-1=0$$

$$\frac{a=....., b=.....}{c=.....} \rightarrow a+c=..... \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \end{cases}$$

پس معادله دارای است و گزینه صحیح است.

تذکر: هرگاه در معادلات گویا، دو کسر باهم مساوی شوند و صورت‌های آن‌ها یکسان برای حل معادله کافی است یکبار صورت‌ها را مساوی صفر و بار دیگر مخرج‌ها را مساوی هم قرار دهیم.

مثال ۳: معادله $\frac{x^2-1}{x^3+4x^2-x} = \frac{x^2-1}{x^3+3}$ را حل کنید.

صورت‌های کسرهای معادله داده شده باهم برابرند پس داریم:

$$\begin{cases} x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=..... \\ x^3+4x^2-x = x^3+3 \rightarrow 4x^2-x-3=0 \rightarrow \frac{a=....., b=....., c=.....}{a+b+c=.....} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=..... \end{cases} \end{cases}$$

$x=....$ ، $x=....$ و $x=....$ مخرج دو کسر در معادله را صفر نمی‌کند پس جواب‌های بدست آمده همگی قابل هستند.

مثال ۴: پارامتر a را چنان بیابید که $x = \frac{1}{2}$ ریشه معادله $\frac{a+3}{x+3} + \frac{a+2}{x+2} = \frac{2(a+5)}{x+5}$ باشد.

چون $x = \frac{1}{2}$ ریشه معادله کسری فوق است پس می‌توان به جای x در معادله $\frac{1}{2}$ را قرار داد.

$$\frac{a+3}{....+3} + \frac{a+2}{....+2} = \frac{2(a+5)}{....+5} \rightarrow \frac{2(a+3)}{7} + \frac{2(a+2)}{5} = \frac{4(a+5)}{11} \rightarrow$$

تذکر: هرگاه در معادلات گویا، دو کسر باهم مساوی شوند می‌توان برای حل معادله طرفین وسطین کرد.

مثال ۵: معادله $\frac{x+4}{3x-8} = \frac{x+5}{3x-7}$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\frac{x+4}{3x-8} = \frac{x+5}{3x-7} \rightarrow (x+4)(3x-7) = (x+5)(3x-8)$$

$$\rightarrow \cancel{3x^2} - 7x + 12x - 28 = \cancel{3x^2} - 8x + 15x - 40 \rightarrow x = \dots\dots\dots$$

مثال ۶: ۱۱ کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با ۴ کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند با تبخیر چند کیلوگرم آن غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد.

(سراسری فارس از کشور ۹۲)

- ۰ / ۴ (۱) ۰ / ۵ (۲) ۰ / ۶ (۳) ۰ / ۸ (۴)

پاسخ:

رنگ ۱۱ کیلو رنگ با غلظت ۴۰ درصد $\rightarrow 11 \times \frac{40}{100} = \dots\dots\dots$ kg

رنگ ۴ کیلو رنگ با غلظت ۷۰ درصد $\rightarrow 4 \times \frac{70}{100} = \dots\dots\dots$ kg

بنابراین روی هم $7/2$ kg = + رنگ دارد. حال اگر X کیلوگرم، میزان تبخیر باشد در این صورت داریم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \rightarrow 72 = 75 - 5x \rightarrow \dots\dots \rightarrow x = \dots\dots\dots$$

پس گزینه صحیح است.

نذکر: هرگاه در معادلات گویا، صورت با مخرج ساده شود می‌توان آن را ساده کرد.

مثال ۷: معادله $\frac{x^3-1}{x-1} = 3$ را حل کنید.

پاسخ:

صورت کسر را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و آن را با مخرج ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^3-1}{x-1} = 3 \rightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3 \rightarrow x^2+x+1=3 \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow \begin{cases} X = \dots\dots \\ X = \dots\dots \end{cases}$$

X = قابل قبول نیست. زیرا

نذکر: گاهی اوقات با تغییر متغیر می‌توان یک معادله کسری را از طریق یک معادله درجه دوم حل کرد.

مثال ۸: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

ب $\frac{x^2+2}{x^2+2x+1} + \frac{x^2+2x+1}{x^2+2} = \frac{5}{2}$

پاسخ:

الف اگر $\frac{x}{x+1} = A$ بگیریم در این صورت معادله کسری به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A^2 + A - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجربه}} (A+3)(A-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} A+3=0 \rightarrow A = \dots \\ A-2=0 \rightarrow A = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} = -3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \dots \\ \frac{x}{x+1} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \dots \end{cases}$$

ب $\frac{x^2+2}{x^2+2x+1} = A$ بگیریم در این صورت معادله کسری به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A + \frac{1}{A} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{A^2+1}{A} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2A^2 + \dots = 5A \rightarrow 2A^2 - \dots + \dots = 0 \xrightarrow{\text{تجربه}} (2A-1)(A-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2A-1=0 \rightarrow A = \frac{1}{2} \\ A-2=0 \rightarrow A = 2 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \dots$$

$$A = 2 \rightarrow \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \dots$$

تعریف نسبت طلایی: در ریاضیات و هنر هنگامی نسبت طلایی رخ می‌دهد که نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر برابر نسبت کل به بخش بزرگتر باشد.

مثال ۹: اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۳۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد. طول و عرض زمین چقدر است؟

پاسخ: اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم داریم:

$$y \begin{matrix} x \\ \square \end{matrix} \quad \text{محیط مستطیل: } 2(x+y) = 320 \rightarrow x+y = 160 \quad (1) \rightarrow y = 160 - x \quad (2)$$

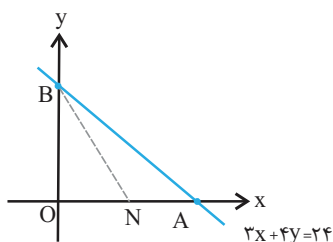
$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \xrightarrow{(1); (2)} \frac{x}{160-x} = \frac{160}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$x^2 = (160)^2 - 160 \cdot x \rightarrow x^2 + 160 \cdot x = (160)^2 \rightarrow x^2 + 160 \cdot x + (80)^2 = (160)^2 + (80)^2$$

$$\rightarrow (x+80)^2 = 32000 \rightarrow x+80 = 80\sqrt{5} \rightarrow x = 80\sqrt{5} - 80 \rightarrow$$

$$y = 160 - (80\sqrt{5} - 80) = 240 - 80\sqrt{5}$$

۲-۳- معادلات شامل عبارت‌های گنگ



خط $3x + 4y = 24$ محور طول‌ها را در A و محور عرض‌ها را در B قطع می‌کند و مثلث AOB را ایجاد می‌کند حال می‌خواهیم مختصات نقطه N روی ضلع OA را چنان می‌یابیم که محیط مثلث ANB برابر ۲۲ شود.

$$y_A = 0 \rightarrow 3x + 4(0) = 24 \rightarrow x_A = 8 \rightarrow A(8, 0)$$

$$x_B = 0 \rightarrow 3(0) + 4y = 24 \rightarrow y_B = 6 \rightarrow B(0, 6)$$

واضح است که مختصات N را می‌توان به صورت $N(x, 0)$ در نظر گرفت. پس داریم:

$$ON = x \rightarrow AN = 8 - x$$

$$\triangle OBN \text{ در مثلث قائم‌الزاویه: } NB^2 = OB^2 + ON^2 \rightarrow NB^2 = x^2 + 6^2 \rightarrow NB = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$\triangle OAB \text{ در مثلث قائم‌الزاویه: } AB^2 = OA^2 + OB^2 \rightarrow AB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \rightarrow AB = 10$$

$$\text{به معادله بدست آمده توجه کنید در این معادله مجهول زیر رادیکال قرار گرفته است به همین دلیل به این گونه معادلات، معادلات گنگ می‌گوییم.}$$

$$AN + NB + AB = 22 \rightarrow (8 - x) + \sqrt{x^2 + 36} + 10 = 22 \rightarrow \sqrt{x^2 + 36} = x + 4$$

به معادله بدست آمده توجه کنید در این معادله مجهول زیر رادیکال قرار گرفته است به همین دلیل به این گونه معادلات، معادلات گنگ می‌گوییم.

تکنه: برای حل معادلات رادیکالی، طرفین تساوی را یک یا چند بار به توان فرجه می‌رسانیم تا به معادله‌ای بدون رادیکال برسیم.

تذکره ۱: جواب‌های بدست آمده باید در معادله اصلی امتحان شود زیرا در عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب اضافه ایجاد شود.

$$\sqrt{x^2 + 36} = x + 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 36 + x^2 = (x + 4)^2 \rightarrow 36 + x^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$8x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{8} = 2.5$$

پس مختصات $N(2.5, 0)$ می‌باشد.

مثال ۱۰: معادله $2x - \sqrt{x+1} = 4$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ:

$$2x - \sqrt{x+1} = 4 \rightarrow 2x - 4 = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (2x - 4)^2 = \dots \rightarrow 4x^2 - \dots + 16 = \dots$$

$$\rightarrow 4x^2 - 17x + 15 = 0 \rightarrow \Delta = \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots \end{cases}$$

$x = \dots$ قابل قبول نیست چون اگر آن را در معادله اصلی قرار دهیم رابطه برقرار نمی‌باشد. پس این معادله دارای است، بنابراین گزینه

..... صحیح است.

مثال ۱۱: معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2 \rightarrow \sqrt{x+1} = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x+1 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1 \rightarrow 4\sqrt{x-1} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16(x-1) = 4 \rightarrow x-1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

حال $x = \frac{5}{4}$ را در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

پس $x = \frac{5}{4}$ جواب معادله می‌باشد.

مثال ۱۲: معادله $\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x+1} = 0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x+1} = 0 \rightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2+2x}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-1) - 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)} + (x^2+x+1) = x^2+2x$$

$$\rightarrow -2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta = \dots \rightarrow \dots \end{cases}$$

حال $x = \dots$ را در معادله اصلی قرار می‌دهیم، پس

مثال ۱۳: هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف $\sqrt{x^3+8} + \sqrt{x^3+8} = 6$

ب $x - \sqrt{x-1} = 3$

پاسخ:

$$(\sqrt{x^3+8})^2 = A^2 \rightarrow \sqrt{x^3+8} = A^2$$

الف اگر $\sqrt{x^3+8} = A$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

پس معادله داده شده به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$A^2 + A = 6 \rightarrow A^2 + A - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجربه}} (A - \dots)(A + \dots) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ A = \dots \end{cases}$$

اما $A = \dots$ قابل قبول نیست چون

$$A = 2 \rightarrow \sqrt{x^3+8} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^3+8 = \dots \rightarrow x^3 = \dots \rightarrow x = \dots$$

ب اگر $\sqrt{x-1} = A$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$\sqrt{x-1} = A \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1 = A^2 \rightarrow x = A^2 + 1$$

پس معادله داده شده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(A^2 + 1) - A = 3 \rightarrow A^2 - A - 2 = 0 \xrightarrow{\text{تجربه}} (A - \dots)(A + \dots) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ A = \dots \end{cases}$$

$A = \dots$ غیر قابل قبول است. چون

$$A = 2 \rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \dots$$

(سراسری - ریاضی ۹۴)

مثال ۱۴: حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

۲ (۳) ۱ (۲) -۲ (۱) ۴ (۴)

پاسخ:

اگر $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = A$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 5} = A \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 + 4x + 5 = A^2 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = A^2 - 2 \quad (1)$$

پس معادله داده شده را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \xrightarrow{(1)} A^2 - 2 = A \rightarrow A^2 - A - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ A = \dots \end{cases}$$

که $A = \dots$ قابل قبول نیست، پس داریم:

$$A = 2 \rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 5} = 2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} \dots = 4 \rightarrow x^2 + 4x + \dots = 0$$

پس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با $P = \dots$ بنابراین گزینه صحیح است.

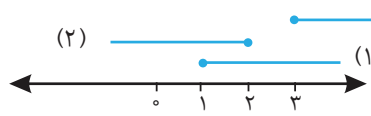
تذکره: گاهی اوقات قبل از حل معادله به مقادیری که می‌توان به جای متغیر در عبارات زیر رادیکال قرار داد (دامنه) توجه کنید.

مثال ۱۵: معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3}$ را حل کنید.

پاسخ:

می‌دانیم زیر رادیکال (با فرجه زوج) همواره باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 & (1) \\ 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 & (2) \\ x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 & (3) \end{cases}$$



با توجه به سه نامعادله داده شده x ای را نمی‌توان پیدا نمود که در هر سه شرط (۱)، (۲)، (۳) صدق کند. پس این معادله جواب ندارد.

تذکره: هر عبارت رادیکال به فرم \sqrt{A} همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

مثال ۱۶: معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} + x = 3$ را حل کنید.

پاسخ:

معادله را به صورت $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} = 3-x$ مرتب می‌کنیم اولاً زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد پس داریم:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \\ x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \end{cases} \longrightarrow x \geq 5 \quad (1) \quad (\text{یعنی جواب معادله باید از 5 بزرگتر یا مساوی باشد})$$

ثانیاً طبق تذکره $\sqrt{x-2} \geq 0$ و $\sqrt{x-5} \geq 0$ می‌باشد. پس $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} \geq 0$ است. بنابراین باید $3-x \geq 0$ باشد. پس داریم:

$$3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \quad (2)$$

اما اگر به (۱) و (۲) توجه کنیم این دو محدوده باهم اشتراکی ندارند یعنی x ای نمی‌توان پیدا کرد. پس معادله جواب ندارد.

مثال ۱۷: معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ را حل کنید.

بیاسخ: عبارت $x - 2$ که در زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد باید همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد. پس داریم: (۱) $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

با توجه به شرط بالا عبارت $x - 1 \geq 1$ است بنابراین (۱) $\sqrt[3]{x-1} \geq 1$

از طرفی طبق تذکره $\sqrt{x-2} \geq 0$ است. (۲)

باتوجه به (۱) و (۲) و معادله داده شده می‌توان نتیجه گرفت که باید $\sqrt{x-2} = 0$ و $\sqrt[3]{x-1} = 1$ باشد. یعنی $x = \dots$ جواب معادله است.

تذکره: هرگاه مجموع چند مقدار نامنفی برابر صفر شود. هر یک برابر صفر است.

مثال ۱۸: معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^3 - x - 6} = 0$$

بیاسخ: طبق تذکره بالا مجموع چند رادیکال که همگی نامنفی می‌باشند برابر صفر است. پس هر یک از آن‌ها برابر صفر می‌باشند.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 6} = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{x^3 - x - 6} = 0 \rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \end{cases}$$

برای راحتی کار، چون جواب‌های مشترک در هر سه معادله جواب معادله اصلی است. پس فقط کافی است معادله $x^2 - 4 = 0$ را حل نمود و جواب‌های آن را در دو معادله دیگر بررسی نمود.

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x = 2 \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \xrightarrow{x=2} \dots\dots \\ x^3 - x - 6 = 0 \xrightarrow{x=2} \dots\dots \end{cases} \rightarrow x = 2 \dots\dots\dots$$

$$x = -2 \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \xrightarrow{x=-2} \dots\dots \\ x^3 - x - 6 = 0 \xrightarrow{x=-2} \dots\dots \end{cases} \rightarrow x = -2 \dots\dots\dots$$

مثال ۱۹: معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$\sqrt{x-3} + x^2 = 9$$

بیاسخ: معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{x-3} + x^2 - 9 = 0$$

می‌دانیم زیر رادیکال همواره نامنفی است. پس $x - 3 \geq 0$ یعنی $x \geq 3$ است. طبق جدول تعیین علامت عبارت $x^2 - 9$ در محدوده $x \geq 3$ همواره به

صورت $x^2 - 9 \geq 0$ است. پس طبق تذکره مجموع دو عبارت نامنفی $\sqrt{x-3}$ و $x^2 - 9$ برابر صفر است. پس هر یک برابر با صفر می‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب مشترک هر دو معادله}} x = 3$$

مثال ۲۰: معادله $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+7} = 1$ را حل کنید.

$$x+6 < x+7 \rightarrow \sqrt{x+6} < \sqrt{x+7} \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{x+7} < 0$$

بیاسخ:

پس $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+7} \neq 1$ بنابراین معادله جواب.....

نمرینان: 

❖ معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{x+1}{x^2+6x+8} = \frac{x^2-1}{3x^2+6x}$$

$$۲) \frac{2x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} = 3$$

$$۳) \frac{3x-2}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{3x^2-7x}{x^2-4}$$

۴- به ازای چه مقدار k جواب معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{k}{x} = \frac{3x}{x+1}$ برابر -2 است.

۵- یک لوله چدنی 65 کیلوگرم وزن دارد. یک لوله چدنی دیگر طول آن 3 متر بیشتر از اولی است و وزن آن در هر متر 2 کیلوگرم وزن دارد. معادله‌ای بنویسید که به کمک آن طول چدن‌ها و وزن یک متر از هر کدام از چدن‌ها را بیابیم.

۶- دو فواره A و B مشترکاً حوضی را در 1 ساعت پر می‌کنند. اگر فقط A باز شود حوض 22 دقیقه دیرتر از وقتی پر می‌شود که فقط B باز باشد. معین کنید هر کدام از این فواره‌ها به تنها حوض را در چه مدتی پر می‌کند.

۷- برق کاری 12 ساعت نیاز دارد تا خانه‌ای را سیم‌کشی کند دستیار او این کار را به تنهایی در 16 ساعت انجام می‌دهد. برق کار بعد از 4 ساعت کار به تنهایی، کار را ترک می‌کند و ادامه کار را به دستیارش می‌سپارد تا کار را تمام کند. چقدر طول می‌کشد که دستیار کار را تمام کند.

۸- یک خودرو پژو از تهران به سمت اهواز حرکت می‌کند و همزمان با آن یک پراید از اهواز به سمت تهران به راه می‌افتد. دو اتومبیل با سرعت‌های ثابت حرکت می‌کنند. طوری که پژو 5 ساعت زودتر از پراید به مقصد خواهد رسید. اگر بعد از 6 ساعت دو اتومبیل بهم برسند پراید چند ساعت دیگر باید براند تا به مقصد برسد.

۹- در یک آزمایش قصد داشتیم مقدار محلول آب‌نمک بسازیم که 6 درصد آن نمک باشد اما به اشتباه 180 کیلوگرم محلول آب‌نمک 5 درصد ساخته‌ایم. برای جبران اشتباهمان 1 کیلوگرم نمک به این محلول اضافه کنیم اکنون چند کیلوگرم از آب را تبخیر کنیم تا به هدفمان برسیم.

۱۰- با $180/000$ تومان می‌خواهیم تعدادی پرس چلوکباب بخریم. اگر بتوانیم برای هر پرس 3000 تومان تخفیف بگیریم. می‌توانیم 10 پرس بیشتر بخریم بدون تخفیف با این پول می‌توانیم چند پرس چلوکباب بخریم.

❖ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱۱) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+9}$

۱۲) $\sqrt{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x-8}$

۱۳) $\sqrt{x^2-4} = x-1$

۱۴) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-4} = 2x+1$

۱۵) $\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+6} = 3$

۱۶) $\sqrt{x^3-x^2} + \sqrt{x-1} = 0$

۱۷) $4x - \sqrt{x^2+1} = x^2+4$

۱۸) $\sqrt{1-3x} + \sqrt{1-2x} = 1$

۱۹) $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-3} = 0$

۲۰) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

۲۱) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x} = 2$

۲۲- اگر $x = 4$ یک جواب برای معادله $x+a = \sqrt{5x-x^2}$ باشد. جواب دیگر آن چقدر است؟

۲۳- نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ بیابید که از دو نقطه $A(1,1)$ و $B(3,-1)$ به یک فاصله باشد.

۲۴- معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ مفروض است.

الف) حدود m را چنان بیابید که فقط یک جواب برای x حاصل شود.

ب) حدود m را چنان بیابید که معادله دو جواب متمایز داشته باشد.

☑☑☑☑ تست‌های درس سوم (معادلات گویا و گنگ)

(سراسری - ریاضی ۹۴)

۷۲- حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۲ (۱)

۷۴- ۱۱ کیلوگرم رنگ با غلظت ۴ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

(سراسری - فارغ - ریاضی ۹۲)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۱)

۷۵- معادله $\sqrt{3x+7} - \sqrt{3-x} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3}$ در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

۴ جواب ندارد

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۲)

۷۶- معادله $|x-2| + \sqrt{x-1} + 1 = 0$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۲)

۷۷- معادله $\sqrt{2-x} = (9-x^2)$ چند جواب دارد؟

۴ صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(گزینه ۲ - ریاضی ۹۲)

۷۸- معادله $\sqrt{3x+3} = \sqrt{x-3} - 3$ چند ریشه دارد؟

۴ جواب ندارد

بی‌شمار (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سنجش ریاضی ۹۲)

۷۹- به ازای کدام مقدار a معادله $\sqrt{3x^2-7x+2} + \sqrt{2x^2+4x-ax-2a} = 0$ ، ریشه‌ی حقیقی دارد؟

$4, \frac{2}{3}$ (۴)

$4, -\frac{1}{3}$ (۳)

$2, \frac{2}{3}$ (۲)

$2, \frac{2}{3}$ (۱)



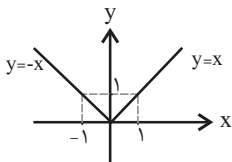
- ۸۰- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{2}{x^2-2x-3} = \frac{-3}{2}$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴
- (سنجش ریاضی ۹۳)
- ۸۱- معادله $\sqrt{x} + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100} + \sqrt{x^2} + \sqrt{-x^2 + 6x - 8} = x + 2$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰
- (سنجش ریاضی ۹۴)
- ۸۲- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 4x + \sqrt{x} + 2 = 0$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر
- (سنجش ریاضی ۹۵)
- ۸۳- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x^2+x}{x^2-x-2} + \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ ، کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴) -۲
- (سنجش ریاضی ۹۵)
- ۸۴- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2-2x-2} - \frac{1}{x^2-2x-5} = \frac{3}{2}$ کدام است؟
 (۱) ۲۲ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶
- (سنجش ریاضی ۹۵)
- ۸۵- معادله $\sqrt{2x+4} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2(x+3)}$ چند جواب صحیح دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر
- ۸۶- معادله $1 + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 (۱) فقط یک ریشه مثبت دارد. (۲) فقط یک ریشه منفی دارد.
 (۳) دو ریشه دارد. (۴) ریشه ندارد.
- ۸۷- معادله $\sqrt{x^2-4} + 4 = x(4-x)$ چند جواب دارد؟
 (۱) جواب ندارد (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۸۸- به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{2a}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} = 1$ جواب مضاعف دارد؟
 (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) ۱
- ۸۹- معادله $x(\sqrt{x+2}-x) = 0$ دارای چند جواب حقیقی می‌باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب ندارد.
- ۹۰- اگر $x = -1$ جواب معادله $2x - \sqrt{3x-a} = -4$ باشد، کدام گزینه در مورد جواب‌های دیگر معادله، صحیح است؟
 (۱) فقط یک جواب منفی دارد. (۲) فقط یک جواب مثبت دارد.
 (۳) دو جواب منفی دارد. (۴) جواب دیگر ندارد.
- ۹۱- به ازای چند مقدار t ، معادله $\frac{t-1}{2x} = \frac{x+1}{x^2-2x}$ جواب ندارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۹۲- تعداد ریشه‌های متمایز معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x} = \sqrt{2}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۱-۲- رسم توابع قدر مطلق

در سال گذشته یاد گرفتیم که قدر مطلق هر عدد مانند X به صورت $|X| = \begin{cases} X & X \geq 0 \\ -X & X < 0 \end{cases}$ تعریف می‌شود. بنابراین تابع $y = |x|$ یک تابع

قطعه‌ای است و از دو ضابطه تشکیل شده است. نمودار این تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



حال می‌خواهیم بدانیم چگونه می‌توان تابع $y = |x-2| + 1$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرد و آن را رسم نمود.

می‌دانیم طبق تعریف در عبارت $|u|$ وقتی u بزرگتر یا مساوی صفر است $|u| = u$ و وقتی u منفی است $|u| = -u$ می‌باشد. مثلاً

$$\sqrt{3} - \sqrt{5} \quad \begin{cases} \sqrt{3} - \sqrt{5} < 0 \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{cases}$$

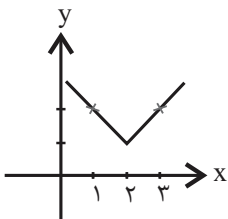
$$5 - \pi \quad \begin{cases} 5 - \pi \geq 0 \\ 5 - \pi \end{cases}$$

بنابراین برای آن که تابع $y = |x-2| + 1$ را بتوان به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرد باید عبارت داخل قدر مطلق یعنی $(x-2)$ را تعیین علامت کنیم.

$$\begin{array}{c|c} x & 2 \\ \hline x-2 & - \quad 0 \quad + \end{array} \Rightarrow |x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

$$y = |x-2| + 1 = \begin{cases} (x-2) + 1 & x \geq 2 \\ -(x-2) + 1 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-1 & x \geq 2 \\ -x+3 & x < 2 \end{cases}$$

بنابراین:



مثال ۱: هر یک از توابع زیر را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کنید.

الف $y = 2|x+1| - 3$

ب $y = |2x-3|$

پ $y = x + \frac{x}{|x|}$

ت $y = x^2 - 2|x|$

پاسخ:

$$\begin{array}{c|c} x & -1 \\ \hline x+1 & - \quad 0 \quad + \end{array} \Rightarrow |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$y = 2|x+1| - 3 = \begin{cases} 2(x+1) - 3 & x \geq -1 \\ 2(-x-1) - 3 & x < -1 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} \dots\dots & x \geq -1 \\ \dots\dots & x < -1 \end{cases}$$

الف

$$\frac{x}{2x-3} \quad \frac{3}{2} \Rightarrow |2x-3| = \begin{cases} \dots\dots\dots & x \geq \frac{3}{2} \\ \dots\dots\dots & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

ب

دقت می‌کنیم که این تابع در $x=0$ تعریف نشده است.

بنابراین:

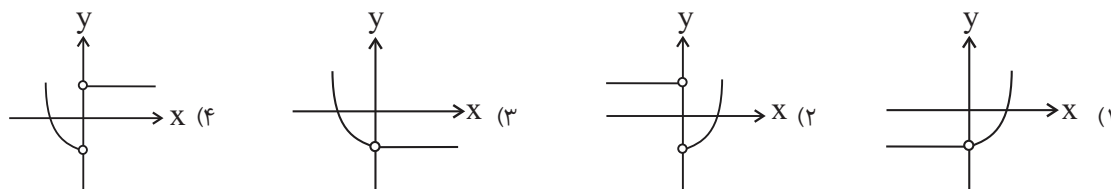
$$\frac{x}{x} \quad 0 \Rightarrow |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x + \frac{x}{x} & x > 0 \\ \dots & \dots \\ x + \frac{x}{-x} & x < 0 \\ \dots & \dots \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} \dots\dots\dots & x \geq 0 \\ \dots\dots\dots & x < 0 \end{cases}$$

ت با توجه به قسمت قبل می‌توان نتیجه گرفت که:

$$y = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - \dots\dots\dots & x \geq 0 \\ x^2 - (\dots\dots\dots) & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} \dots\dots\dots & x \geq 0 \\ \dots\dots\dots & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۲: نمودار تابع $y = x^2 + x|x| - \frac{x}{|x|}$ کدام است؟



بیانیه: با توجه به تابع $y = x^2 + x|x| - \frac{x}{|x|}$ واضح است که تابع در $x=0$ تعریف نشده است. پس داریم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 + x(x) - \frac{x}{x} & x > 0 \\ x^2 + x(-x) - \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار قطعه‌ای بالا واضح است که نمودار آن به صورت گزینه می‌باشد.

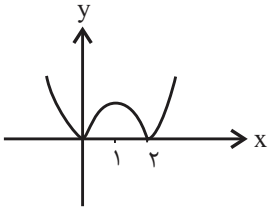
تکنه: برای تبدیل تابع $y = |f(x)|$ به یک تابع قطعه‌ای در حالت کلی باید $f(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مثال ۳: تابع $y = |x^2 - 2x|$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل و سپس نمودار آن را رسم کنید.

بیانیه: ابتدا عبارت $x^2 - 2x$ را تعیین علامت می‌کنیم.

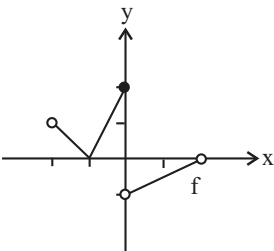
$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & + & - & + \\ \hline & & & \end{array} \Rightarrow y = |x^2 - 2x| = \begin{cases} (x^2 - 2x) & x < 0 \\ -(x^2 - 2x) & 0 \leq x < 2 \\ (x^2 - 2x) & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$



مثال ۴: با توجه به نمودار f نمودار تابع $y = \frac{|f|}{f}$ را رسم کنید.

پاسخ: با توجه به نمودار f می توان نتایج زیر را بدست آورد.



$$1) -2 < x \leq 0; f \geq 0 \Rightarrow |f| = f$$

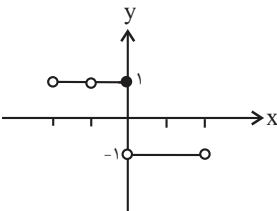
$$2) 0 < x < 2; f \leq 0 \Rightarrow |f| = -f$$

$$3) f(-1) = 0 \Rightarrow \text{در } x = -1 \text{ تعریف نشده است چون مخرج کسر برابر صفر می شود.} \Rightarrow y = \frac{|f|}{f} \text{ تابع}$$

$$y = \begin{cases} 1 & -2 < x \leq 0, x \neq -1 \\ -1 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

پس داریم:

پس نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود.



مثال ۵: نمودار تابع $y = |x - |x - 4||$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کنید.

پاسخ: ابتدا $|x - 4|$ را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل می کنیم:

$$\frac{x}{x-4} \quad \begin{array}{c|c} & + \\ \hline & - \end{array} \quad |x-4| = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x \geq 4 &\rightarrow y = |x - |x - 4|| = |x - x + 4| = |4| = 4 \\ x < 4 &\rightarrow y = |x + x - 4| = |2x - 4| \end{aligned}$$

حال با توجه به $x < 4$ عبارت $(2x - 4)$ را تعیین علامت می کنیم.

$$|2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4 & x < 2 \\ 2x - 4 & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

پس ضابطه y به صورت قطعه‌ای به فرم زیر است:

$$y = |x - |x - 4|| = \begin{cases} \dots\dots\dots & x < 2 \\ \dots\dots\dots & 2 \leq x < 4 \\ \dots\dots\dots & x \geq 4 \end{cases}$$

تکنه: برای هر عدد حقیقی u ، $\sqrt{u^2} = |u|$ است.

مثال ۶: نمودار $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 1$ را رسم کنید.

پاسخ:

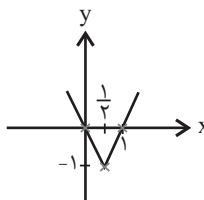
$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 1 = \sqrt{(2x - 1)^2} - 1 = |2x - 1| - 1$$

پس ضابطه تابع به صورت $y = |2x - 1| - 1$ می‌باشد.

x	1/2
2x-1	- +

$$y = |2x - 1| - 1 = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$



تکنه: هر گاه تابعی شامل مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق باشد می‌توان با تعیین علامت هر یک از عبارت‌های داخل قدرمطلق تابع را به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرد.

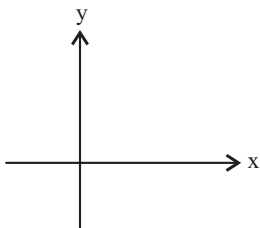
مثال ۷: تابع $y = |x - 1| - |x - 2|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا دو عبارت $(x - 1)$ و $(x - 2)$ را تعیین علامت می‌کنیم، بنابراین داریم:

x	1	2
x-1	- +	+
x-2	-	- +

$$y = \begin{cases} -(x-1) + (x-2) & x < 1 \\ (x-1) + (x-2) & 1 \leq x < 2 \\ (x-1) - (x-2) & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \dots & x < 1 \\ \dots & 1 \leq x < 2 \\ \dots & x \geq 2 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



تکنه: اگر ضابطه یک تابع به صورت مجموع یا تفاضل چند جمله‌ای‌های درجه اول و عبارت‌های قدرمطلق که داخل آن درجه اول است باشد برای رسم نیاز به چند ضابطه‌ای کردن تابع نیست و کافی است ریشه‌های داخل قدرمطلق را پیدا کرده و مقدار تابع را به ازای آن‌ها بدست آوریم و سپس یک نقطه قبل از کوچک‌ترین ریشه داخل قدرمطلق و یک نقطه بعد از بزرگ‌ترین ریشه داخل قدرمطلق پیدا کرده و نقاط بوجود آمده را بهم وصل کنید تا نمودار رسم شود.

مثال ۸: هر یک از نمودارهای زیر را بدون تبدیل تابع به یک تابع قطعه‌ای رسم کنید و برد هر یک را مشخص کنید.

الف $y = 2x - |x - 1|$

ب $y = x - |x - 2| + |x - 3|$

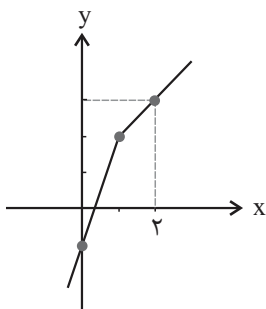
پ $y = ||x| - 2|$

پاسخ:

الف ابتدا ریشه داخل قدر مطلق را بدست می آوریم.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$$

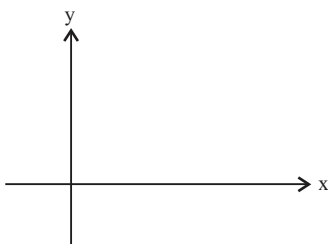
X	۰	۱	۲
y	$2(0) - 0 - 1 = -1$	$2(1) - 1 - 1 = 2$	$2(2) - 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

 از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود که بُرد این تابع برابر با \mathbb{R} می باشد.

 ب ابتدا ریشه های داخل قدرمطلق های تابع $y = x - |x - 2| + |x - 3|$ را بدست می آوریم:

X	۱	۲	۳	۴
y

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود:

با توجه به نمودار برد تابع برابر است.



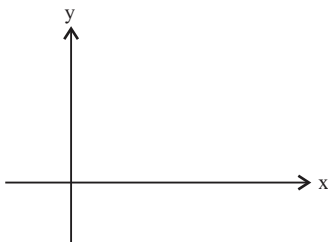
پ ابتدا ریشه های داخل هر قدرمطلق را بدست می آوریم.

$$x = 0 ; |x| - 2 = 0 \rightarrow |x| = 2 \rightarrow x = \pm 2$$

X	-۳	-۲	۰	۲	۳
y

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود:

که با توجه به نمودار برد آن به صورت است.


مثال ۹: مساحت مثلث محصور بین نمودار تابع $y = |3 - |x + 1||$ و محور X ها کدام است؟

۶ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

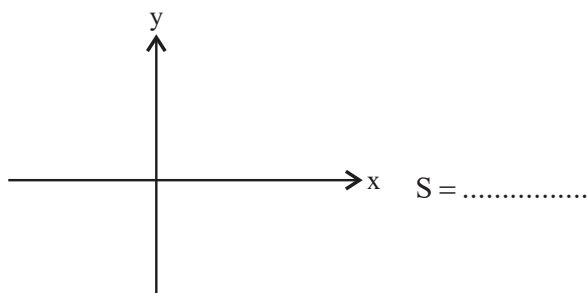
۱۲ (۱)

پاسخ: ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 ; \quad 3 - |x + 1| = 0 \rightarrow |x + 1| = 3 \begin{cases} x + 1 = 2 \rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -3 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

x	-۵	-۴	-۱	۲	۳
y

از بهم وصل کردن این نقاط نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.



پس گزینه صحیح است.

۲-۴- ویژگی‌های قدرمطلق

در سال گذشته با مفهوم قدرمطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید در این درس به برخی دیگر از ویژگی‌های قدرمطلق می‌پردازیم. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف فاصله $c(۳)$ روی محور تا مبدأ چقدر است؟.....

ب فاصله $B(-۶)$ روی محور تا مبدأ چقدر است؟.....

پ فاصله $A(x)$ روی محور تا مبدأ چقدر است؟

برای پاسخ به این قسمت باید در دو شرط مسئله را حل کنیم، اگر $x \geq 0$ باشد، $AO = x$ است اما اگر $x \leq 0$ باشد $AO = -x$ است. بنابراین فاصله نقطه $A(x)$ از مبدأ برابر است با:

$$AO = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

نتیجه با توجه به تعریف قدرمطلق می‌توان گفت فاصله $A(x)$ تا مبدأ یعنی AO برابر $|x|$ است.

ویژگی‌های قدرمطلق:

ویژگی ۱:

الف اگر عددی نامنفی باشد، قدرمطلق آن برابر خود آن است.

$$x \geq 0 \rightarrow |x| = x$$

به عبارت دیگر:

ب اگر عددی منفی باشد، قدرمطلق آن برابر قرینه آن است.

$$x < 0 \rightarrow |x| = -x$$

به عبارت دیگر:

مثال ۱۰: اگر α و β ریشه‌های معادله $۳x^2 - ۵x - ۱ = 0$ باشند حاصل $A = ||\alpha| - |\beta||$ را بدست آورید.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ:

$$3x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \dots\dots \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \dots\dots \end{cases}$$

چون $\alpha < 0$ ، $\beta > 0$ ، علامت نیستند پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$1) \alpha > 0, \beta < 0 \rightarrow \|\alpha\| - \|\beta\| = |\alpha - (-\beta)| = |\alpha + \beta| \stackrel{S > 0}{=} \alpha + \beta = \dots$$

$$2) \alpha < 0, \beta > 0 \rightarrow \|\alpha\| - \|\beta\| = |-\alpha - \beta| = |-(\alpha + \beta)| \stackrel{S > 0}{=} \alpha + \beta = \dots$$

پس گزینه‌ی صحیح است.

ویژگی ۲:

قدر مطلق هر عدد مانند x یعنی فاصله x تا مبدأ بنابرین، این مقدار همواره مثبت یا صفر است.

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| \geq 0$$

به عبارت دیگر:

مثال ۱۱: برد تابع $y = 3 - 2|x|$ را بیابید.

پاسخ:

$$|x| \geq 0 \xrightarrow{\times(-2)} -2|x| \leq 0 \xrightarrow{+3} 3 - 2|x| \leq 3 \rightarrow y \leq 3 \Rightarrow R = (-\infty, \dots]$$

ویژگی ۳:

نقطه‌ای که روی محور قرار دارند و فاصله‌اشان تا مبدأ برابر عدد مثبت a شود عبارتند از $x = a$ یا $x = -a$

$$|x| = a \xrightarrow{a > 0} x = a \text{ یا } x = -a$$

به عبارت دیگر:

مثال ۱۲: اگر از تساوی $2|x-1| - 1 = A$ دو مقدار مثبت برای x بدست آید محدوده A را بیابید.

پاسخ:

$$2|x-1| - 1 = A \rightarrow 2|x-1| = A + 1 \rightarrow |x-1| = \frac{A+1}{2}$$

$$\frac{A+1}{2} > 0 \rightarrow A+1 > 0 \rightarrow A > -1 \quad (1)$$

طبق ویژگی قبل باید $\frac{A+1}{2} > 0$ باشد پس داریم:

از طرفی برای x باید دو مقدار مثبت بدست آید پس داریم:

$$|x-1| = \frac{A+1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{A+1}{2} + 1 = \frac{A+3}{2} \xrightarrow{\text{جواب مثبت}} \frac{A+3}{2} > 0 \rightarrow A > -3 \quad (2) \\ x = -\frac{A+1}{2} + 1 = \frac{-A+1}{2} \xrightarrow{\text{جواب مثبت}} \frac{-A+1}{2} > 0 \rightarrow A < 1 \quad (3) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم پس $-1 < A < 1$ است.

ویژگی ۴:

اگر فاصله دو نقطه از مبدأ یکسان باشد، آن‌گاه دو نقطه با هم برابر و یا قرینه هم هستند.

$$|x| = |y| \rightarrow x = y \text{ یا } x = -y$$

به عبارت دیگر:

$$|x| = |y| \leftrightarrow x^2 = y^2$$

تذکره: برای هر دو عدد حقیقی X و Y داریم.

ویژگی ۵:

جذر مربع هر عددی برابر با قدر مطلق آن عدد است.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

به عبارت دیگر:

مثال ۱۳: اگر X و Y دو عدد حقیقی مثبت باشند و $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{4y^2 - 4y + 1}$ ثابت کنید $\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2} = 3$

پاسخ:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{4y^2 - 4y + 1} \rightarrow \sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{(2y-1)^2} \rightarrow |x+2| = |2y-1|$$

پس دو حالت زیر اتفاق می افتد:

$$۱) x+2 = 2y-1 \rightarrow x-2y = -3$$

غیر قابل قبول (چون X و Y دو عدد حقیقی مثبت هستند). $۲) x+2 = -(2y-1) \rightarrow x+2y = -1$

پس $x-2y = -3$ است. بنابراین داریم:

$$\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2} = \sqrt{(x-2y)^2} \rightarrow |x-2y| = |-3| = 3$$

ویژگی ۶:

دو نقطه که نسبت به مبدأ قرینه باشند فاصله شان تا مبدأ یکسان است.

$$|-x| = |x|$$

به عبارت دیگر:

مثال ۱۴: با توجه به ویژگی ۶ تساوی های زیر برقرار است.

الف $|-x+2| = |x-2|$

ب $|-x-5| = |x+5|$

ویژگی ۷:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

برای هر دو عدد حقیقی X و Y داریم:

$$|x \cdot y| = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

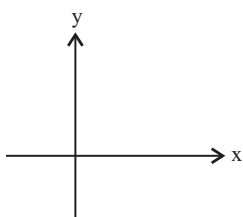
اشارات:

مثال ۱۵: نمودار تابع $y = ||3x| - |x||$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$y = ||3x| - |x|| = ||3|x| - |x|| = |3|x| - |x|| = |2|x|| = 2|x|$$

که نمودار آن به صورت زیر رسم می شود:



x	o
y

مثال ۱۶: اگر $|x^3 - 8| < x^2 + 2x + 4$ باشد ثابت کنید $|x - 2| < 1$

پاسخ:

$$|x^3 - 8| \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد چاق و لاغر}} |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| = |.....| |.....|$$

از طرفی عبارت $x^2 + 2x + 4$ همواره مثبت است. پس:

$$|x-2|(x^2 + 2x + 4) < x^2 + 2x + 4 \xrightarrow{\div (.....)} |x-2| < 1$$

نتیجه: مربع قدر مطلق هر عدد حقیقی برابر مربع همان عدد است.

$$|x|^2 = x^2$$

به عبارت دیگر:

مثال ۱۷: با توجه به نامساوی $x^2 - |x| - 6 < 0$ نشان دهید $|x| < 3$ است.

پاسخ:

$$x^2 - |x| - 6 = |x|^2 - |x| - 6$$

حال اگر $|x| = a$ در نظر بگیریم عبارت بالا به صورت زیر ساده می‌شود.

$$a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) \Rightarrow x^2 - |x| - 6 = (|x| - 3)(|x| + 2)$$

با توجه به نامساوی $x^2 - |x| - 6 < 0$ داریم: $|x| - 3 < 0 \rightarrow |x| < 3$ عبارت..... همواره مثبت است.

ویژگی ۸:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

برای هر دو عدد حقیقی x و y ($y \neq 0$) داریم:

$$|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$$

نذکر: برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

مثال ۱۸: اگر $x \neq 1$ باشد، از نامساوی $\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$ نتیجه بگیرید $x < \frac{1}{2}$ است.

پاسخ:

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1 \rightarrow \frac{|x|}{|x-1|} < 1 \xrightarrow{\times |x-1|} |x| < |x-1| \rightarrow |x|^2 < |x-1|^2 \rightarrow x^2 < x^2 - 2x + 1 \rightarrow \dots \rightarrow \dots < 1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

ویژگی ۹:

الف) نقاطی که فاصله آن‌ها از مبدأ کمتر یا مساوی عدد مثبت c باشد بازه $[-c, c]$ است.

$$|x| \leq c \xrightarrow{c > 0} -c \leq x \leq c$$

به عبارت دیگر:

ب) نقاطی که فاصله آن‌ها از مبدأ بیشتر یا مساوی عدد مثبت c باشد به صورت $(-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$ است.

$$|x| \geq c \xrightarrow{c > 0} x \leq -c \text{ یا } x \geq c$$

به عبارت دیگر:

$$|a+b| + |a-b+2| + b = |b-2|$$

مثال ۱۹: $|a+1| < 1-b$ باشد ثابت کنید.

پاسخ:

$$|a+1| < 1-b \rightarrow -1+b < a+1 < 1-b$$

بنابراین:

$$۱) -1+b < a+1 \rightarrow a-b+2 > 0$$

$$۲) -1+b < 1-b \rightarrow 2b < 2 \rightarrow b < 1$$

$$۳) a+1 < 1-b \rightarrow a+b < 0$$

$$\underbrace{|a+b|}_{(۳)} + \underbrace{|a-b+2|}_{(۱)} + b = \underbrace{(-a-b)}_{(۲)} + (a-b+2) + b = -b+2 = \underbrace{-(b-2)}_{(۲)} = |b-2|$$

پس داریم:

ویژگی ۱۰:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

برای هر عدد حقیقی x داریم:

اثبات: می‌دانیم که $|x| \leq |x|$ حال اگر $|x| = k$ بگیریم داریم:

$$|x| \leq k \rightarrow |x| \leq k \rightarrow -k \leq x \leq k \xrightarrow{|x|=k} -|x| \leq x \leq |x|$$

مثال ۲۰: در هر یک از حالات زیر محدوده x را تعیین کنید.

الف $x - |x| < 0$

ب $x + |x| > 0$

پاسخ:

الف برای آن که $x < |x|$ باشد باید $x < 0$ باشد.

ب برای آن که $x > -x$ باشد باید $x > 0$ باشد.

ویژگی ۱۱: (نامساوی مثلثی)

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

اثبات:

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 2|x||y|} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2} \leq |x| + |y|$$

مثال ۲۱: حداقل مقدار تابع f با ضابطه $f = |x-2| + |4-x|$ را بدون رسم تعیین کنید.

$$y = |x-2| + |4-x| \geq |(x-2) + (4-x)| = |2| = 2 \Rightarrow y \geq 2$$

پاسخ:

پس کمترین مقدار تابع برابر است.

۳-۴- معادلات قدرمطلق

گفتیم که فاصله نقطه $A(x)$ تا مبدأ برابر $|x|$ است. حال می‌خواهیم فاصله دو نقطه روی محور را پیدا کنیم.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف فاصله دو نقطه $A(5)$ و $B(2)$ روی محور چقدر است؟

ب) فاصله دو نقطه $A(7)$ و $B(-1)$ روی محور چقدر است؟.....

پ) فاصله دو نقطه $A(-2)$ و $B(-6)$ روی محور چقدر است؟.....

ت) فاصله دو نقطه $A(x)$ و $B(y)$ روی محور چقدر است؟

در پاسخ به این قسمت باید مشخص کنیم x بزرگتر است یا y ، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$AB = \begin{cases} x - y & x > y \\ 0 & x = y \\ y - x & x < y \end{cases}$$

$$AB = |x - y|$$

نتیجه فاصله دو نقطه $A(x)$ و $B(y)$ روی محور اعداد برابر است با:

مثال ۲۲: عبارت «فاصله بین x و 2 برابر 5 است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$$|x - 2| = 5$$

پاسخ:

به تساوی‌های نظیر مثال (۱) که مجهول آن در قدرمطلق قرار دارد معادلات قدرمطلق می‌گویند.

روش‌های جبری در حل معادلات قدرمطلق:

روش اول: گاهی اوقات می‌توان با استفاده از ویژگی‌های موجود در قدرمطلق، یک معادله قدرمطلق را حل کرد.

مثال ۲۳: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x - 2| = 3$$

$$۲) |x - 2| + |x^2 - 4| = 0$$

$$۳) |3x - 1| = |x - 7|$$

$$۴) \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x = 2$$

$$۵) (x - 1)^2 - 5|x - 1| + 6 = 0$$

پاسخ:

$$|x - 2| = 3 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \rightarrow x = \dots\dots\dots \\ x - 2 = -3 \rightarrow x = \dots\dots\dots \end{cases} \quad (۱)$$

(۲) چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر است پس هر یک از عبارت‌ها برابر است.

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = \dots\dots\dots & (۱) \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \dots\dots\dots \text{ یا } x = \dots\dots\dots & (۲) \end{cases}$$

اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم $x = \dots\dots\dots$ قابل قبول است.

$$|3x - 1| = |x - 7| \rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = x - 7 \rightarrow \dots\dots\dots \\ 3x - 1 = -(x - 7) \rightarrow \dots\dots\dots \end{cases} \quad (۳)$$

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x + 2)^2} = |x + 2| \quad (۴) \text{ می‌دانیم که:}$$

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} - x = 2 \rightarrow |x + 2| - x = 2 \rightarrow |x + 2| = x + 2 \rightarrow x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$$

بنابراین:

(۵) می‌دانیم که $(x - 1)^2 = (x - 1)^2$ ، اگر $|x - 1| = A$ بگیریم داریم:

$$A^2 - 5A + 6 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}} \begin{cases} A = \dots \rightarrow |x-1| = \dots \rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \\ A = \dots \rightarrow |x-1| = \dots \rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases}$$

مثال ۲۴: معادله $x^2 + |x^2 - x - 12| = x + 12$ چند جواب صحیح دارد؟

- ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

پاسخ: جدول تعیین علامت $x^2 + |x^2 - x - 12| = x + 12 \rightarrow |x^2 - x - 12| = -x^2 + x + 12 \rightarrow x^2 - x - 12 \leq 0$

با توجه به محدوده بالا عدد صحیح در این بازه وجود دارد پس گزینه صحیح است.

مثال ۲۵: معادله $2|x^2 - 6x| - 8 = 10$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ:

$$\begin{cases} 2|x^2 - 6x| - 8 = 10 \rightarrow |x^2 - 6x| = 9 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 9 & (1) \\ x^2 - 6x = -9 & (2) \end{cases} \\ 2|x^2 - 6x| - 8 = -10 \rightarrow |x^2 - 6x| = -1 \rightarrow \dots \end{cases}$$

دارای جواب است $\rightarrow \Delta = \dots \rightarrow x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow (1)$

دارای جواب است $\rightarrow \Delta = \dots \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (2)$

پس این معادله جواب دارد پس گزینه صحیح است.

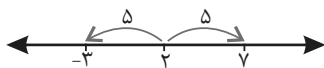
روش دوم:

در حل برخی از معادلات قدرمطلق می‌توان با استفاده از مفهوم فاصله دو نقطه معادله را حل کرد.

مثال ۲۶: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

- ۱) $|x-2| = 5$ ۲) $|x-2| = |x-4|$ ۳) $|x-2| + |x-6| = 4$ ۴) $|x-2| + |x-3| = 2$

پاسخ:



۱) باید نقطاتی مانند x را پیدا کنیم که فاصله آن‌ها از ۲ برابر ۵ باشد.

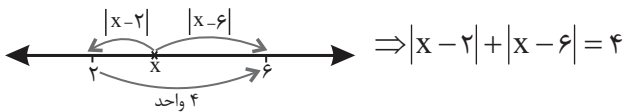
بنابراین $x = 7$ و $x = -3$ جواب‌های معادله هستند.

۲) باید نقطاتی مانند x را پیدا کنیم که فاصله آن‌ها از ۲ و ۴ یکسان باشد. با توجه به محور واضح است که تنها نقطه با این ویژگی وسط اعداد ۲ و ۴

است. پس $x = \dots$ جواب معادله است.

۳) باید نقطاتی مانند x را بیابیم که مجموع فاصله‌های آن‌ها از و برابر ۴ است.

با توجه به محور اعداد فاصله بین ۶ و ۲ عدد ۴ است. اگر X کوچکتر از ۲ یا بزرگتر از ۶ باشد، مجموع فاصله آن از ۲ و ۶ بزرگتر از ۴ است. اما اگر $2 < X < 6$ باشد داریم:



بنابراین هر عدد که در فاصله $[2, 6]$ باشد جواب معادله است.

(۴) باید نقاطی مانند X را پیدا کنیم که مجموع فاصله آن از و برابر است. این نقطه یقیناً بین ۲ و ۳ نیست.

حالت اول: اگر $X < 2$ و فاصله X تا ۲ را k بگیریم فاصله X تا ۳، $k+1$ خواهد بود از طرفی مجموع این دو فاصله ۲ است. بنابراین $k+k+1=2$

و یعنی $k = \frac{1}{2}$ پس:

$$x = 2 - k = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

حالت دوم: اگر $X > 2$ باشد وضع به همین منوال است و $k = \frac{1}{2}$ پس جواب دیگر معادله $x = 3 + k = \dots\dots\dots$

روش سوم:

در این روش عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم سپس در بازه‌های مختلف جواب معادله را بدست می‌آوریم.

مثال ۲۷: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $x + |x-1| = 3$ ۲) $x^2 = |x-2|$ ۳) $|x-2| - |x-3| = 1$ ۴) $|x^2 - x| = x - 6$

پاسخ: (۱) عبارت $x-1$ که داخل قدرمطلق قرار دارد را تعیین علامت می‌کنیم:

حالت اول: $x \geq 1 \rightarrow |x-1| = x-1$

قابل قبول است $x + |x-1| = 3 \rightarrow x + x - 1 = 3 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

حالت دوم: $x < 1 \rightarrow |x-1| = -x+1$

جواب ندارد $x + |x-1| = 3 \rightarrow x - x + 1 = 3 \rightarrow$

(۲) عبارت $x-2$ در داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

حالت اول: $x \geq 2 \rightarrow |x-2| = x-2$

$x^2 = |x-2| \rightarrow x^2 = x-2 \rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = -7$

پس معادله در $x \geq 2$ ، جواب ندارد.

حالت دوم: $x < 2 \rightarrow |x-2| = -x+2$

$x^2 = |x-2| \rightarrow x^2 = -x+2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0$

پس جواب‌های معادله $x = -2$ یا $x = 1$ می‌باشد که هر دو در محدوده $x < 2$ قرار دارد.

(۳) با تعیین علامت عبارات $x-2$ ، $x-3$ داریم:

: $x \leq 2$ (حالت اول) $|x-2| = 2-x$ ، $|x-3| = 3-x$

غقق $-1 = 1 \rightarrow |x-2| - |x-3| = 1 \rightarrow (2-x) - (3-x) = 1 \rightarrow$

x	2	3
$x-2$	-	+
$x-3$	-	-

$$\begin{aligned} & \text{حالت دوم)} \quad 2 < x \leq 3 : \quad |x-2| = x-2, |x-3| = 3-x \\ & \rightarrow |x-2| - |x-3| = 1 \rightarrow (x-2) - (3-x) = 1 \rightarrow 2x-5=1 \rightarrow x=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{حالت سوم)} \quad x > 3 : \quad |x-2| = x-2, |x-3| = x-3 \\ & \rightarrow |x-2| - |x-3| = 1 \rightarrow (x-2) - (x-3) = 1 \rightarrow 1=1 \end{aligned}$$

پس جواب‌های معادله به صورت $A = [3, +\infty)$ است.

(۴) با تعیین علامت $x^2 - x$ داریم:

$$\text{حالت اول)} \quad x \leq 0 : \quad x^2 - x > 0 \rightarrow |x^2 - x| = x - 6 \rightarrow x^2 - x = x - 6$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 6 = 0 \text{ غقق}$$


$$\text{حالت دوم)} \quad 0 < x < 1 : \quad x^2 - x < 0 \rightarrow |x^2 - x| = x - 6 \rightarrow x - x^2 = x - 6 \rightarrow x^2 = 6$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{6} \text{ غقق}$$

$$\text{حالت سوم)} \quad x \geq 1 : \quad x^2 - x > 0 \rightarrow |x^2 - x| = x - 6 \rightarrow x^2 - x = x - 6$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 6 = 0 \text{ غقق}$$

بنابراین معادله جواب ندارد.

 **مثال ۲۸:** معادله $x + \frac{x}{|x|} = 3$ جواب دارد.

(۴) دو، هم علامت

(۳) مختلف‌العلامه

(۲) یک، منفی

(۱) یک، مثبت

 **پاسخ:** توجه می‌کنیم که $x = 0$ نمی‌تواند جواب باشد چون مخرج کسر را صفر می‌کند.

حالت اول: $x > 0$

$$x + \frac{x}{|x|} = 3 \xrightarrow{|x|=\dots} x + \frac{x}{\dots} = 3 \rightarrow x + \dots = 3 \rightarrow x = \dots \text{ قق}$$


حالت دوم: $x < 0$

$$x + \frac{x}{|x|} = 3 \xrightarrow{|x|=\dots} x + \frac{x}{\dots} = 3 \rightarrow x - \dots = 3 \rightarrow x = \dots \text{ غقق}$$

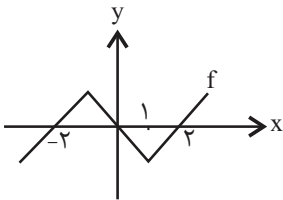
پس گزینه (۱) صحیح است.

روش هندسی حل معادلات قدرمطلق

همان‌گونه که می‌دانید در روش هندسی حل معادلات، رسم تابع بسیار اهمیت دارد. از این رو باید بتوانیم در حل معادلات قدرمطلق به روش هندسی تابع $|f(x)|$ را رسم کنیم.

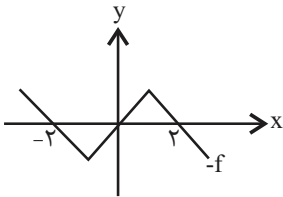
 **نکته:** برای رسم نمودار $-f(x)$ از روی نمودار $f(x)$ کافی است قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال ۲۹: با توجه به نمودار f ، نمودار $-f$ را رسم کنید.



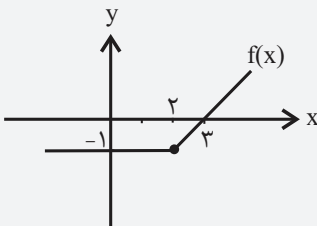
پاسخ:

برای رسم نمودار $-f$ کافی است y تمام نقاط f را قرینه کنیم پس داریم:

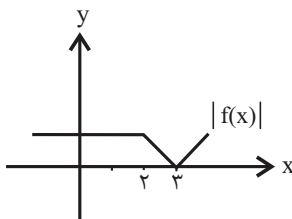


نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ به کمک نمودار $f(x)$ کافی است در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x قرار دارد تصویر آینه‌وار $f(x)$ یعنی نمودار $-f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم.

مثال ۳۰: با توجه به نمودار داده شده f نمودار $y = |f(x)|$ را رسم کنید.



پاسخ:

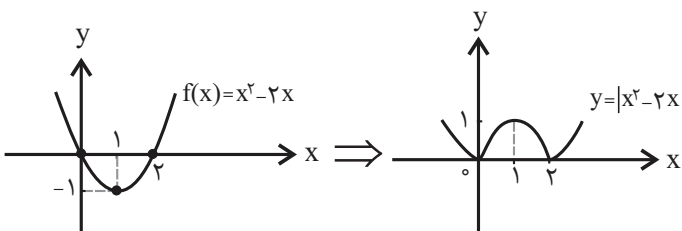


مثال ۳۱: نمودارهای زیر را با توجه به نکته قبل رسم کنید و سپس به ازای $y = 2$ معادلات بدست آمده را به روش هندسی حل کنید.

الف $y = |x^2 - 2x|$

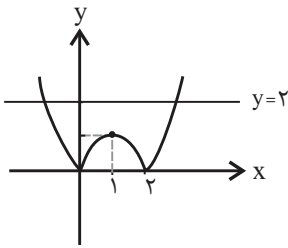
ب $y = ||x| - 2|$

پاسخ:



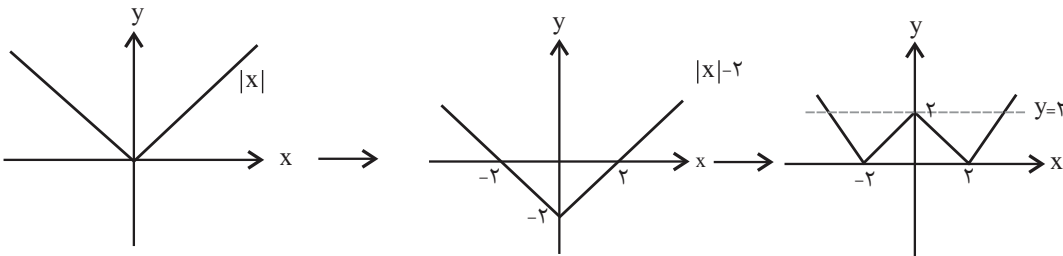
الف

حال به کمک نمودار $y = |x^2 - 2x|$ معادله $|x^2 - 2x| = 2$ (به ازای $y = 2$) را حل می‌کنیم.



پس معادله $|x^2 - 2x| = 2$ دارای دو جواب است.

ب نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود.

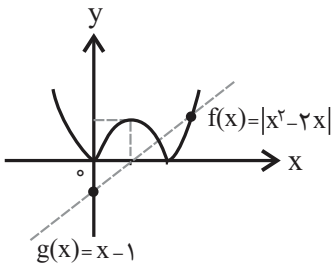


با توجه به نمودار معادله $|x| - 2 = 2$ ، ۳ جواب دارد.

مثال ۳۲: تعداد ریشه‌های معادله $|x^2 - 2x| = x - 1$ چقدر است؟

پاسخ:

نمودار دو تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ و $g(x) = x - 1$ را رسم می‌کنیم (در یک دستگاه مختصات)



محل برخورد دو تابع f و g جواب معادله $|x^2 - 2x| = x - 1$ است.

محل برخورد این دو تابع در دو نقطه است. پس معادله $|x^2 - 2x| = x - 1$ دارای دو جواب است.

مثال ۳۳: معادله $|x^2 - 1| = 2x - |x|$ چند جواب مثبت و چند جواب منفی دارد.

پاسخ:

۰, ۲ (۴)

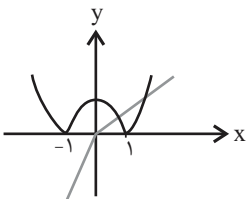
۲, ۲ (۳)

۱, ۲ (۲)

۲, ۱ (۱)

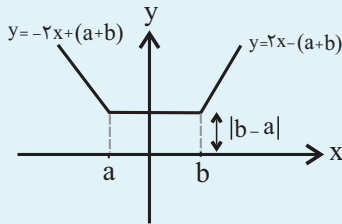
دو تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ و $g(x) = 2x - |x|$ را در نظر گرفته و هر یک را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$g(x) = 2x - |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به این که دو تابع f و g همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند طول نقاط برخورد جواب معادله است پس گزینه (۴) صحیح است.

نکته: نمودار تابع $y = |x - a| + |x - b|$ به صورت روبه‌رو رسم می‌شود به این تابع، تابع گلدانی می‌گویند. ($a < b$)



مسئله ۳۴: اگر خط $y = 2x + 3$ نمودار $y = |x - 2| + |x + a|$ را در بی‌شمار نقطه قطع کند مقدار a کدام است؟

۴) -۵

۳) -۱

۲) ۳

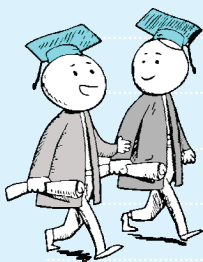
۱) -۲

پاسخ:

با توجه به نکته گفته شده خط $y = 2x + 3$ ، در صورتی نمودار $y = |x - 2| + |x + a|$ را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند که

$$y = 2x + 3 = 2x - (a + b) \xrightarrow{b=2} -a - 2 = 3 \rightarrow a = \dots$$

پس گزینه صحیح است.



تمرینات:

هر یک از توابع زیر به یک تابع قطعه‌ای تبدیل کرده و سپس آن را رسم کنید.

۱) $y = |x(x-2)|$

۲) $y = |x|(x-2)$

۳) $y = x|x-2|$

۴) $y = \frac{x-|x|}{x+|x|+1}$

۵) $y = |x-5| - |x-3|$

۶) $y = |2x - |x-2||$

۷- طول پاره‌خط شکسته و نمودار تابع $y = |x-1| + |x-3|$ در فاصله $[-1, 4]$ را بدست آورید.

۸- مساحت محدود به نمودار تابع $y = x + 2|x-3|$ و محور X ها چقدر است؟

۹- اگر خط $y = m$ نمودار تابع $y = |x-1| + |x+2|$ را در دو نقطه قطع کند حدود m را بیابید.

۱۰- بیشترین مقدار تابع $y = x - |2x-1|$ چقدر است؟

۱۱- به کمک روش هندسی تعداد جواب‌های معادله $x + \frac{x}{|x|} = 3$ را پیدا کنید.

۱۲- اگر منحنی $y = ||x-3| - 1|$ خط $y = 3k - 2$ را دقیقاً در سه نقطه قطع کند. k چقدر است؟

۱۳- اگر $0 < a < 1$ باشد حاصل $A = \sqrt{(a + \frac{1}{a})^2 - 4} + \sqrt{(a - \frac{1}{a})^2 + 4}$ را بر حسب a بدست آورید.

۱۴- اگر X عدد حقیقی و مخالف -۱ باشد از نامساوی $|x^2 - 1| < |x+1|$ نتیجه بگیرید $0 < x < 2$.

۱۵- ثابت کنید:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

۱۶- با استفاده از ویژگی $-|x| \leq x \leq |x|$ ثابت کنید $|x+y| \leq |x| + |y|$

۱۷- اگر $A = \sqrt{1 + \sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$ ثابت کنید $A \geq \sqrt{2}$ (راهنمایی: طرفین تساوی را به توان ۲ برسانید).

۱۸- ثابت کنید:

الف) $\text{Max}\{x, -x\} = |x|$

ب) $\text{Max}\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

پ) $\text{Min}\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

۱۹- با استفاده از تمرین ۱۶۸، تابع $y = \text{Max}\{2x, x-1\}$ را رسم کنید.

۲۰- با استفاده از تمرین ۱۶۸، $\text{Min}(\text{Max}\{x+2, 3x-2\})$ را پیدا کنید.

۲۱- اگر $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0$ ثابت کنید.

$$|x-y| = |x| + |y|$$

۲۲- اگر عبارت $A = \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ به X بستگی نداشته باشد، حدود X را بیابید.

۲۳- حداقل مقدار عبارت $A = \left| \frac{a+3b}{a+b} \right| + \left| \frac{3a+b}{a+b} \right|$ چقدر است؟

۲۴- در چه صورتی $|x+y| = |x| + |y|$ است.

۲۵- در چه صورتی $|x+y| < |x| + |y|$ است.

❖ معادلات زیر را حل کنید.

۲۶) $|2x-1| = 3$

۲۷) $|x-7| = 2x+4$

۲۸) $|7-3x| + 3x = 7$

۲۹) $x^4 + 3x|x| - 10 = 0$

۳۰) $|x-3| = 1$

۳۱) $|x+4| + |4x-1| = 8x$

۳۲) $|x-1| + |3x+1| = |4x|$

❖ به روش هندسی تعداد ریشه‌های معادلات زیر را حل کنید.

۳۳) $|x^2 - 1| = |x|$

۳۴) $|x+1| + |x-3| = 2$

۳۵) $x|x| = 4$

۳۶) $|x^2 - 4x| + |x| = 3$

۳۷- نقاطی از محور اعداد حقیقی را بیابید که فاصله آن‌ها از ۲، دو واحد کمتر از فاصله آن‌ها تا -۲ است.

۳۸- بر روی محور x ها دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها از ۶، دو برابر فاصله آن‌ها از $\frac{3}{4}$ است. مجموع این نقاط چقدر است؟

۳۹- تعداد صفرهای تابع $y = |x-1| + |x^3 - 4x + 3|$ را بیابید.

۴۰- خط $y = k$ نمودار $y = ||x-1|$ را در ۳ نقطه قطع می‌کند، k چقدر است؟

۴۱- معادله $|x-1| + 2x = 3$ به ازای چه مقادیری از a دارای دو جواب است؟

۴۲- اگر تفاضل دو ریشه معادله $|x-1| + |x+1| = a$ برابر ۶ باشد مقدار a چقدر است؟

۴۳- به ازای چه مقادیری از k خط $y = kx + 2$ نمودار $y = |2x - 5|$ را قطع نمی‌کند؟



تست‌های درس چهارم (قدر مطلق و ویژگی‌های آن)

۹۳- اگر نمودار $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + ax + b$ در بازه $\left[-1, \frac{-1}{2}\right]$ بر خط $y = 3$ منطبق باشد، $a - b$ چه عددی

(گزینه ۲- ریاضی ۹۱)

- است؟
- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

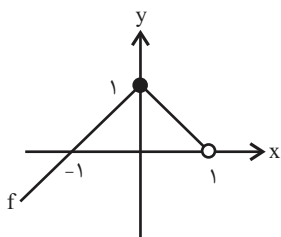
(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۹۴- معادله $\left| |x^2 - 13| - 10 \right| = 2$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

(گزینه ۲- ریاضی ۹۲)

۹۵- کدام گزینه نمایش جبری نمودار f است؟



$$\begin{cases} f(x) = |x| + 1 \\ x \in (-\infty, 1) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(x) = -|x| + 1 \\ x \in (-\infty, -1) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 - |x| \\ x \in (-\infty, 1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 + |x| \\ x \in (-\infty, -1) \end{cases} \quad (3)$$

۹۶- چند نقطه روی محور طول‌ها یافت می‌شود که فاصله‌اش از نقطه‌ای به طول ۳- روی محور طول‌ها از ۳ برابر فاصله‌اش از مبدأ، یک واحد

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

- بیشتر باشد؟
- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۹۷- مجموعه‌ی همه‌ی m هایی که معادله $|2x - 2| = m - 2|x + 3|$ به ازای آنها فاقد جواب است، در کدام گزینه آمده است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

- (۱) $(-\infty, 10)$ (۲) $(-\infty, 8)$ (۳) $(10, +\infty)$ (۴) $(8, +\infty)$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۹۸- حاصل جمع جواب‌های معادله $x^2 + 2x - 6 + 3|x| = 0$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) -۱ (۴) ۱

(گزینه ۲- ریاضی ۹۳)

۹۹- معادله $|x + 1| + \sqrt{x - 1} = 3x + 2$ دارای چند جواب حقیقی است؟

- (۱) ۲ (۲) هیچ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار

(گزینه ۲- ریاضی ۹۵)

۱۰۰- به ازای چه مقادیری از a ، معادله $ax + |x| = 1$ دو جواب دارد؟

- (۱) $|a| > 2$ (۲) $|a| < 2$ (۳) $|a| < 1$ (۴) $|a| > 1$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۶)

۱۰۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x+1}{x-1} < a$ به صورت $(-\infty, b)$ است مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(گزینه ۲- ریاضی ۹۶)

۱۰۲- مجموعه جواب نامعادله $2x - |x - 2| > x^2$ یک بازه باز از نقطه میانی a است، a کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

(سنجش - ریاضی ۹۱)

 ۱۰۳- مجموعه جواب‌های معادله $|2x-1|+2|x+3|=5$ کدام است؟

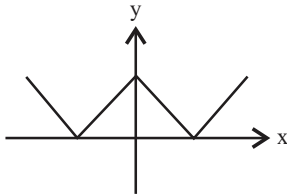
- (۱) $(-3, 1)$ (۲) $R - [-3, \frac{1}{2}]$ (۳) $[-3, \frac{1}{2}]$ (۴) \emptyset

(سنجش - ریاضی ۹۲)

 ۱۰۴- مجموعه جواب‌های معادله $\sqrt{4x^2+12x+9}+2\sqrt{x^2-4x+4}=5$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$ (۳) $(\frac{-3}{2}, 2)$ (۴) \emptyset

(سنجش - ریاضی ۹۲)



۱۰۵- شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟

- (۱) $y = |x-2| - |x|$ (۲) $y = |x-2| + |x|$
 (۳) $y = ||x|-2|$ (۴) $y = |x| + x - 2$

(سنجش - ریاضی ۹۵)

 ۱۰۶- تابع با ضابطه $f(x) = |2x+4|+3|1-x|+x$ در کدام بازه ثابت است؟

- (۱) \emptyset (۲) $(-\infty, 1]$ (۳) $[-2, +\infty)$ (۴) $[-2, 1]$

 ۱۰۷- معادله $\frac{4x-8}{|x-2|} = x$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

 ۱۰۸- نمودار تابع $y = -|x-4|+1$ محور x ها را در طول‌هایی قطع می‌کند. مجموع این طول‌ها کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۸

 ۱۰۹- اگر معادله $3|x-2|+|x-1|=k$ در فاصله $1 < x < 2$ دارای ریشه باشد، محدوده k کدام است؟

- (۱) R (۲) \emptyset (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $(1, 3)$

 ۱۱۰- بیشترین مقدار عبارت $|2x-1|-2|x-3|$ چه قدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۴

 ۱۱۱- مجموع ریشه‌های صحیح معادله $|x+1| = |x-1| + |x|$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۰ (۴) ۵۵

 ۱۱۲- کدام خط زیر نمودار تابع $y = 2|x-1|+|x|$ را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند؟

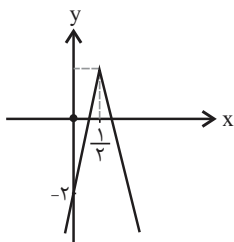
- (۱) $y = 2-x$ (۲) $y = x-2$ (۳) $y = 0$ (۴) $y = 1$

 ۱۱۳- معادله $||x-1|-2|=1$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

 ۱۱۴- اگر نمودار $y = 1+a|1+bx|$ به صورت مقابل باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۵
 (۲) -۶
 (۳) -۷
 (۴) -۸



درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

۵-۱- فاصله بین دو نقطه

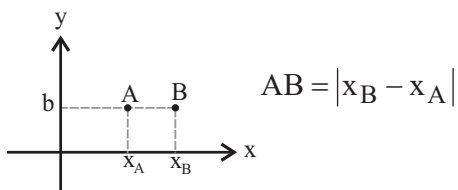
همان گونه که در بحث معادلات قدرمطلق گفته شد هرگاه بخواهیم فاصله دو نقطه $A(x_A)$ و $B(x_B)$ را روی محور اعداد حساب کنیم کافی است قدرمطلق اختلاف آن‌ها را بدست آوریم:

$$AB = |x_B - x_A|$$

در این بخش می‌خواهیم فاصله دو نقطه در دستگاه مختصات را از یکدیگر پیدا کنیم:

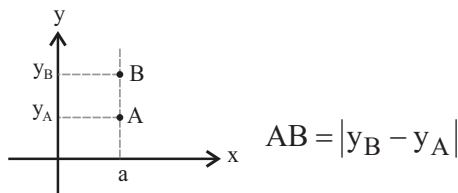
الف) فاصله دو نقطه هم‌عرض

فرض کنید دو نقطه $A(x_A, b)$ و $B(x_B, b)$ دو نقطه هم‌عرض در دستگاه مختصات باشد. طول پاره‌خط AB به صورت زیر بدست می‌آید:



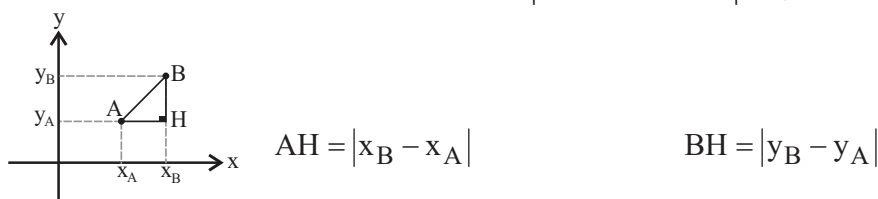
ب) فاصله دو نقطه هم‌طول

نقاط هم‌طول $A(a, y_A)$ و $B(a, y_B)$ را در دستگاه مختصات در نظر بگیرید فاصله این دو نقطه به صورت زیر بدست می‌آید:



پ) فاصله دو نقطه در حالت کلی

دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم فاصله بین این دو نقطه یعنی طول پاره‌خط AB را حساب کنیم مطابق شکل زیر از نقاط A و B خطوطی را بر هر دو محور عمود می‌کنیم در این صورت داریم:



با توجه به رابطه فیثاغورث در مثلث AHB داریم:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \rightarrow |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = AB^2 \rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نتیجه: فاصله هر نقطه $A(x, y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با:

مثال ۱: فاصله دو نقطه $A(4, -3)$ و $B(1, 1)$ را حساب کنید.

$$\begin{cases} x_A = \dots, y_A = \dots \\ x_B = \dots, y_B = \dots \end{cases} \rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\dots} \rightarrow AB = \dots$$

مثال ۲: فاصله نقطه $A(2, 4)$ را از محل تلاقی دو خط $2y - x = 1$ و $2x - y = 7$ بیابید.

ابتدا محل تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم و آن را B می‌نامیم:

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \rightarrow x = \dots, y = \dots \rightarrow B(\dots, \dots)$$

حال فاصله بین دو نقطه A و B را بدست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2} = \dots$$

مثال ۳: نقطه $A(-2, 3)$ مفروض است، فاصله این نقطه را تا نقاط زیر بدست آورید.

الف قرینه نقطه A نسبت به محور طولها

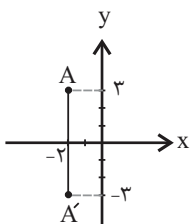
ب قرینه نقطه A نسبت به محور عرضها

پ قرینه نقطه A نسبت به مبدأ

پاسخ:

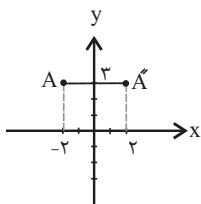
الف به شکل روبه‌رو توجه کنید.

A' قرینه نقطه A نسبت به محور طولها می‌باشد که مختصات آن به صورت $A'(-2, -3)$ است پس:



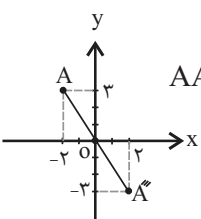
$$AA' = \dots\dots\dots$$

ب A'' قرینه نقطه A نسبت به محور است که مختصات آن به صورت $A''(\dots, \dots)$ می‌باشد بنابراین:



$$AA'' = \dots\dots\dots$$

پ A''' قرینه نقطه A نسبت به است که مختصات آن به صورت $A'''(\dots, \dots)$ می‌باشد بنابراین:



$$AA''' = \dots\dots\dots$$

مثال ۴: نقطه $A(3, 4)$ مفروض است نقاطی روی محور طولها بیابید که فاصله آن تا A برابر ۵ باشد.

پاسخ: فرض کنیم $B(x, 0)$ نقطه‌ای روی محور طولها است که $AB = 5$ می‌باشد. پس داریم:

$$AB = \sqrt{(x-3)^2 + (0-4)^2} = 5 \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-3)^2 + 16 = 25 \rightarrow (x-3)^2 = 9$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-3=3 \rightarrow x=6 \\ x+3=-3 \rightarrow x=-6 \end{cases} \rightarrow B(6, 0) \text{ یا } B(-6, 0)$$

مثال ۵: اگر $A(1, 1)$ و $B(2, 2)$ و $C(-1, 3)$ سه رأس یک مثلث باشد.

الف نشان دهید مثلث ABC، قائم‌الزاویه است.

ب مساحت مثلث را بیابید.

پاسخ:

الف با توجه به شکل رسم شده، برای این که نشان دهیم مثلث ABC قائم‌الزاویه است کافی است نشان دهیم که $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (رابطه فیثاغورث)

(فیثاغورث)

پس ابتدا طول ضلع‌های AC، AB و BC را بدست می‌آوریم:

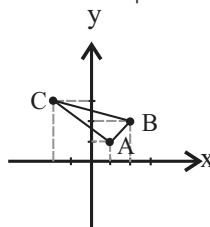
$$AB = \sqrt{(2 - \dots)^2 + (2 - \dots)^2} = \dots$$

$$AC = \sqrt{(-1 - \dots)^2 + (3 - \dots)^2} = \dots$$

$$BC = \sqrt{(-1 - \dots)^2 + (3 - \dots)^2} = \dots$$

مثلث ABC قائم‌الزاویه است $\rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = \frac{AB \times AC}{2} = \dots$$



ب

مثال ۶: نقاط $B(0, 1)$ و $C(-1, 0)$ دو رأس از مثلث متساوی‌الساقین هستند در صورتی که طول ساق‌های AB و AC از مثلث $\sqrt{5}$ باشد مختصات نقطه A را بدست آورید.

پاسخ: اگر $A(x, y)$ باشد، پس:

$$AB = AC \rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \rightarrow x = -y$$

پس $A(x, -x)$ می‌باشد.

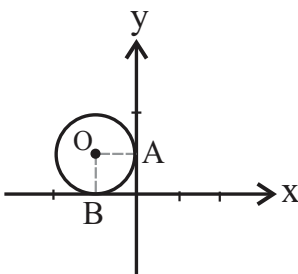
از طرفی $AB = \sqrt{5}$ است. پس داریم:

$$\sqrt{x^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + x^2 + 2x + 1 = 5 \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = \dots \rightarrow A(\dots, \dots) \\ x = \dots \rightarrow A(\dots, \dots) \end{cases}$$

مثال ۷: اگر دایره‌ای در ناحیه دوم و بر محورهای مختصات مماس باشد و نقطه $(-3, 5)$ روی آن، شعاع و مرکز دایره را بیابید.

پاسخ: شکل تقریبی دایره به صورت زیر می‌باشد.



از طرفی $A(0, y)$ و $B(x, 0)$ ، شعاع دایره $OA = OB = r$ است. پس $O(x, y)$ است.

$$OA = |x|, OB = |y| \xrightarrow{\text{شعاع دایره } OA=OB} |x| = |y| \xrightarrow{\text{در ناحیه دوم است}} x = -y$$

از طرفی شعاع دایره برابر با y است. پس اگر $C(-3, 5)$ در نظر بگیریم $OC = y$ است. پس داریم:

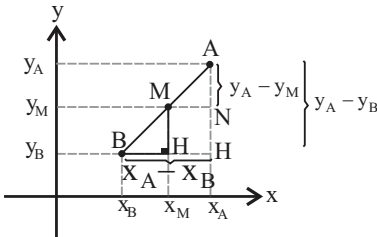
$$\begin{cases} O(-y, y) \\ C(-3, 5) \rightarrow OC = \sqrt{(-y+3)^2 + (y-5)^2} = y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2 - 6y + 9 + y^2 - 10y + 25 = y^2 \rightarrow \\ OC = y \end{cases}$$

$$y^2 - 16y + 34 = 0$$

بنابراین مختصات مرکز دایره بصورت (\quad) و (\quad) و شعاع آن \dots است.

۵-۲- مختصات وسط یک پاره خط

دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ در صفحه مختصات در نظر بگیرید. می‌خواهیم مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را برحسب مختصات دو نقطه A و B بدست می‌آوریم. از نقاط A و B و M بر محورهای مختصات عمود رسم می‌کنیم.



دو مثلث AMN و ABH متشابه بوده و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{1}{2}$ است. پس

$$\begin{cases} \frac{x_A - x_M}{x_A - x_B} = \frac{1}{2} \rightarrow x_M = \dots\dots \\ \frac{y_A - y_M}{y_A - y_B} = \frac{1}{2} \rightarrow y_M = \dots\dots \end{cases}$$

نتیجه مختصات نقطه M وسط پاره خط AB به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

مثال ۸: اگر $A(1, -4)$ و $B(-5, 2)$ دو سر پاره خط AB باشند مختصات نقطه M وسط این پاره خط را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x_A = \dots\dots, x_B = \dots\dots \rightarrow x_M = \dots\dots \\ y_A = \dots\dots, y_B = \dots\dots \rightarrow y_M = \dots\dots \end{cases}$$

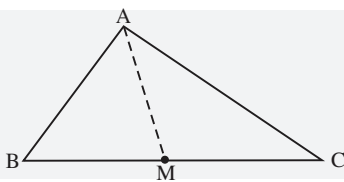
مثال ۹: اگر $A(1, 4)$ و $B(2, 6)$ دو سر قطر یک دایره باشند. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

پاسخ: مرکز دایره وسط قطر دایره می‌باشد پس داریم:

$$O\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \dots\dots\dots\right) = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$$

از طرفی AB طول قطر دایره است بنابراین داریم:

$$AB = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{AB}{2} = \dots\dots\dots$$



مثال ۱۰: اگر $A(1, 2)$ و $B(-2, 4)$ و $C(3, 1)$ سه رأس یک مثلث باشند.

الف معادله میانه وارد بر ضلع BC را بیابید.

ب طول میانه وارد بر ضلع BC چقدر است؟

پاسخ:

الف AM میانه وارد بر ضلع BC است که ضلع BC را در M نصف می‌کند پس M وسط B و C قرار دارد. بنابراین:

$$M = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$$

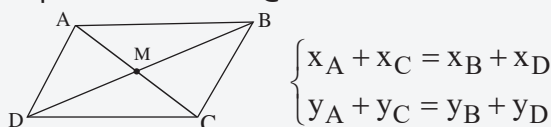
حال با داشتن دو نقطه M و A معادله خطی که از این دو نقطه عبور می‌کند را بدست می‌آوریم (معادله میانه وارد بر ضلع BC)

ب با داشتن مختصات دو نقطه M و A طول میانه AM محاسبه می‌شود:

$$AM = \sqrt{\dots\dots\dots}$$

تذکره: در یک متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

تکنه: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ چهار رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند داریم:

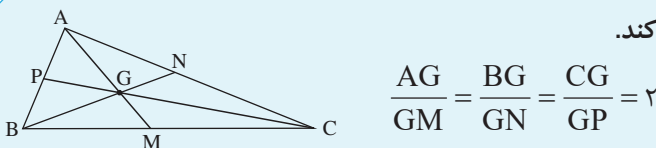


مثال ۱۱: اگر $A(1, 2)$ و $B(3, 4)$ و $C(2, 7)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند آن گاه مختصات رأس D را پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow \dots\dots\dots \rightarrow x_D = \dots\dots\dots \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow \dots\dots\dots \rightarrow y_D = \dots\dots\dots \end{cases}$$

تذکره: نقطه برخورد میانه‌ها هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

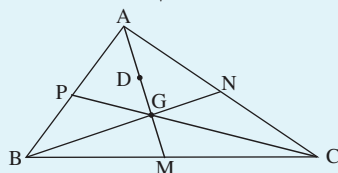


تکنه: اگر G نقطه تلاقی میانه‌های (مرکز ثقل) مثلث ABC باشد، آن گاه مختصات آن به صورت زیر می‌آید:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

اشاره: اگر D را وسط AG در نظر بگیریم در این صورت G وسط MD می‌باشد زیرا $AG = 2GM$. بنابراین:

$$x_G = \frac{x_D + x_M}{2} = \frac{\frac{x_A + x_G}{2} + \frac{x_B + x_C}{2}}{2} \rightarrow 4x_G = x_A + x_G + x_B + x_C \rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$



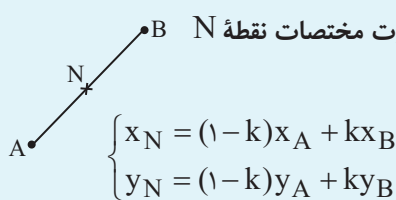
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \text{ به همین ترتیب}$$

مثال ۱۲: نقاط $A(-2, -3)$ و $B(4, 0)$ دو رأس یک مثلث هستند که نقطه $G(3, -2)$ محل تلاقی میانه‌ها است. مختصات رأس سوم

مثلث را پیدا کنید.

پاسخ: اگر $C(x, y)$ باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x}{3} \rightarrow \dots \rightarrow x = \dots \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y}{3} \rightarrow \dots \rightarrow y = \dots \end{cases} \rightarrow C(\dots, \dots)$$



نکته: اگر نقطه N روی پاره خط AB قرار داشته باشد که $AN = kAB$ در این صورت مختصات نقطه N به صورت زیر بدست می‌آید:

مثال ۱۳: اگر $A(2, 5)$ و $B(3, 8)$ مختصات دو سر پاره خط AB باشد. نقطه N روی این پاره خط را چنان بیابید که $AN = 3NB$.

پاسخ: $N(x, y)$ در نظر می‌گیریم چون $AN = 3NB$. پس می‌توان گفت $AN = \frac{3}{4}AB$ بنابراین $k = \frac{3}{4}$ است حال طبق نکته فوق می‌توان مختصات نقطه N را به دست آورد.

$$\begin{cases} x_N = (1-k)x_A + kx_B \rightarrow x_N = \dots \\ y_N = (1-k)y_A + ky_B \rightarrow y_N = \dots \end{cases}$$

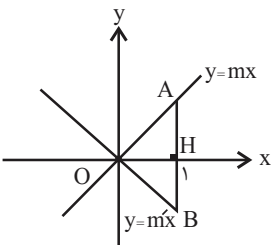
مثال ۱۴: نقطه $A(1, 2)$ و $B(4, 1)$ دو رأس یک مثلث هستند. اگر رأس سوم روی محور طول‌ها و محل تلاقی میانه‌ها روی نیم‌ساز ربع اول باشد. مختصات رأس سوم را پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به فرض مسئله $C(x, 0)$ و $G(a, a)$ روی نیم‌ساز ربع اول یعنی خط $y = x$ قرار دارد که در آن باید a مثبت باشد.

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x}{3} \rightarrow a = \frac{1+4+x}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y}{3} \rightarrow a = \frac{2+1+0}{3} \rightarrow a = 1 \end{cases} \rightarrow 1 = \frac{5+x}{3} \rightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2, 0)$$

۵-۳- عمود بودن دو خط

در سال گذشته یاد گرفتیم که در صورتی دو خط باهم موازی‌اند که شیب‌های آن‌ها با یکدیگر برابر باشند. حال می‌خواهیم بدانیم اگر خطوط d و d' با شیب‌های m و m' برهم عمود باشند چه رابطه بین m و m' وجود دارند.



فرض کنید دو خط $y = m'x$ و $y = mx$ بر یکدیگر در مبدأ عمود باشند مطابق شکل زیر نقطه‌ای به طول ۱ روی هر دو خط در نظر بگیرید.

عرض نقطه A برابر m و عرض نقطه B برابر m' است. مثلث OAB در شکل روبه‌رو مثلث قائم‌الزاویه است. به

راحتی می‌توان نشان داد $\triangle OAH \sim \triangle OHB$ پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$OH^2 = HA \cdot HB \rightarrow 1^2 = m \cdot (-m') \rightarrow mm' = -1$$

نتیجه: اگر دو خط با شیب m و m' برهم عمود باشند آن‌گاه $mm' = -1$

مثال ۱۵: اگر $A(1, 2)$ و $B(-1, 4)$ دو سر پاره خط AB باشد. معادله عمودمنصف پاره خط AB را بدست آورید.

پاسخ: عمود منصف AB خطی است که بر AB عمود و آن را نصف می کند پس ابتدا مختصات نقطه وسط AB را بدست می آوریم:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$$

اگر m شیب خط AB و m' شیب خط عمودمنصف بر AB باشد آن گاه:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dots\dots\dots \xrightarrow{mm' = -1} m' = \dots\dots$$

حال با داشتن m' و M معادله عمود منصف AB را بدست می آوریم:

مثال ۱۶: مثلث ABC با رئوس $A(-4, 7)$ و $B(4, 3)$ و $C(0, -5)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC را

بیابید.

پاسخ: می دانیم معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC بر ضلع BC عمود است پس اگر m شیب خط BC و m' شیب ارتفاع باشد داریم:

$$m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dots\dots\dots \xrightarrow{mm' = -1} m' = \dots\dots$$

حال با داشتن مختصات A و شیب m' می توان معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC را به صورت زیر بدست آورد.

تکنه: عمودمنصف هر دو وتر دایره از مرکز دایره می گذرد.

مثال ۱۷: مرکز دایره ای را پیدا کنید که از سه نقطه $A(-3, -8)$ و $B(2, 7)$ و $C(4, 3)$ بگذرد.

پاسخ: با توجه به نکته گفته شده ابتدا معادله عمودمنصف وترهای AB و AC را بدست می آوریم:

$$m_{AB} = \dots\dots\dots \rightarrow m' = \dots\dots \text{ عمودمنصف } AB$$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots) \text{ وسط } AB$$

$$AB \text{ معادله خط عمودمنصف: } y - y_M = m'(x - x_M) \rightarrow \dots\dots\dots (1)$$

$$m_{AC} = \dots\dots\dots \rightarrow m'' = \dots\dots \text{ عمودمنصف } AC$$

$$M'\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots) \text{ وسط } AC$$

$$AC \text{ معادله خط عمودمنصف: } y - y_{M'} = m''(x - x_{M'}) \rightarrow \dots\dots\dots (2)$$

محل تلاقی دو خط (۱) و (۲) مرکز دایره می باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} (1): \dots\dots\dots \\ (2): \dots\dots\dots \end{cases} \rightarrow O(\dots\dots, \dots\dots)$$

مثال ۱۸: معادله دو ضلع مستطیلی عبارتند از $D_1: 2x - 3y + 5 = 0$ و $D_2: 3x + 2y - 7 = 0$ ، اگر $A(2, -3)$ یکی از رأس های

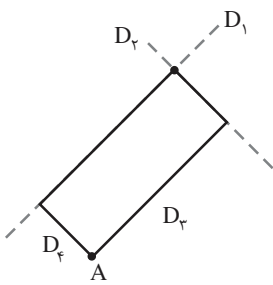
مستطیل باشد معادله دو ضلع دیگر مستطیل را پیدا کنید.

پاسخ:

$$3x + 2y - 7 = 0 \rightarrow m = -\frac{3}{2} \xrightarrow{mm' = -1} \text{ دو ضلع عمود برهم هستند.}$$

$$2x - 3y + 5 = 0 \rightarrow m' = \frac{2}{3}$$

مختصات نقطه A در دو خط داده شده صدق نمی کند. پس نقطه A بر روی این دو خط قرار ندارد.



فرض کنیم شکل تقریبی مستطیل به صورت روبرو باشد.

برای نوشتن معادله خط D_3 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$D_3 \parallel D_1 \rightarrow m_{D_3} = \frac{2}{3}$$

$$D_3 : y - y_A = m_{D_3} (x - x_A) \rightarrow \dots\dots\dots$$

معادله خط D_3 :

$$D_4 \parallel D_2 \rightarrow m_{D_4} = -\frac{3}{2}$$

$$D_4 : y - y_A = m_{D_4} (x - x_A) \rightarrow \dots\dots\dots$$

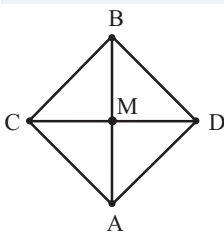
مثال ۱۹: اگر $A(-1, 4)$ و $B(3, 1)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند:

الف معادله قطرهای مربع را بنویسید.

ب مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.

پاسخ:

الف با توجه به شکل فرضی که رسم کردیم معادلات قطرها بصورت زیر محاسبه می‌شود:



$$m_{AB} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

معادله قطر AB :

$$\text{معادله قطر } AB : y - y_A = m_{AB} (x - x_A) \rightarrow y - (4) = -\frac{3}{4} (x + 1)$$

$$CD \perp AB \rightarrow m_{CD} = \frac{4}{3}$$

معادله قطر CD :

$$\text{AB وسط } M(1, \frac{5}{2})$$

$$\text{CD معادله خط } : y - y_M = m_{CD} (x - x_M) \rightarrow y - \frac{5}{2} = \frac{4}{3} (x - 1)$$

ب می‌دانیم $M(1, \frac{5}{2})$ است و معادله خط CD به صورت $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$ است. پس می‌توان $C(x, \frac{4}{3}x + \frac{7}{6})$ در نظر گرفت. از طرفی:

$$\begin{cases} MC = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{7}{6} - \frac{5}{2})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{4}{3})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{16}{9}(x-1)^2} = \frac{5}{3}|x-1| \\ MA = \sqrt{(1-(-1))^2 + (\frac{5}{2} - 4)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

از طرفی $MC = MA$ (در مربع قطرها باهم برابر و همدیگر را نصف می‌کنند).

$$\frac{5}{3}|x-1| = \frac{5}{2} \rightarrow |x-1| = \frac{3}{2} \rightarrow x-1 = \pm \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ یا } x = -\frac{1}{2} \rightarrow x_C = \frac{5}{2}, x_D = -\frac{1}{2}$$

پس $C(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ و $D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ است.

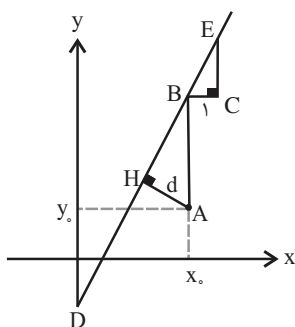
مثال ۲۰: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(2, 3)$ بگذرد و بر نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم عمود باشد.

پاسخ: اگر شیب خط مورد نظر را m' بگیریم داریم:

$$y = -x \rightarrow m = -1 \xrightarrow{m'm = -1} m' = 1$$

$$\text{معادله خط مورد نظر: } y - y_A = m'(x - x_A) \rightarrow y - 3 = 1(x - 2)$$

۵-۴- فاصله نقطه از خط



نقطه $A(x_0, y_0)$ و خط D به معادله $ax + by + c = 0$ را در نظر بگیرید در این بخش به دنبال آن هستیم که رابطه‌ای برای محاسبه فاصله نقطه A از خط D پیدا کنیم. خط D و نقطه A را به صورت زیر در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله نقطه A تا خط D برابر d است. از نقطه A خطی به موازی محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطه B قطع کند. از نقطه B به اندازه یک واحد در جهت افقی مطابق شکل جلو رفته تا نقطه C بدست آید از C عمود بر BC رسم می‌کنیم تا خط D را در E قطع کند. برای بدست آوردن d مراحل زیر را طی می‌کنیم:

الف مختصات نقطه B را بدست می‌آوریم؛ با قرار دادن x_0 در معادله خط y نقطه B بدست می‌آید.

$$y_B = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} \rightarrow B(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$$

$$AB = \left| y_0 + \frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}$$

ب اندازه ضلع AB را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{E} \end{cases} \rightarrow \Delta ABH \sim \Delta BCE$$

ت نشان می‌دهیم دو مثلث ΔABH و ΔBCE متشابه‌اند.

$$\frac{d}{1} = \frac{AB}{BE} \rightarrow \frac{d}{1} = \frac{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}}{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ث نسبت تشابه را می‌نویسیم:

نتیجه $d = AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ؛ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط D به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

مثال ۲۱: فاصله نقطه $M(2, -1)$ از خط $3x - 4y + 2 = 0$ چقدر است؟

پاسخ:

$$\begin{cases} M(2, -1) \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 2 - 4(-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dots\dots\dots$$

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تکنه: فاصله مبدأ مختصات از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه روبه‌رو بدست می‌آید:

مثال ۲۲: نقطه $A(1, -1)$ و $B(3, 1)$ و $C(-1, 2)$ سه رأس یک مثلث هستند. اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث ABC را بیابید.

بیاسخ:

ابتدا معادله خط BC را بدست می‌آوریم:

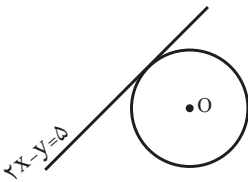
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 1}{-1 - 3} = \frac{-1}{4}$$

$$BC \text{ معادله خط } y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \rightarrow y - 1 = \frac{-1}{4}(x - 3) \rightarrow 4y - 4 = -x + 3 \rightarrow x + 4y - 7 = 0.$$

اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر است با فاصله نقطه A تا خط BC پس داریم:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 + 4(-1) - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{17}}$$

مثال ۲۳: خط $2x - y = 5$ بر دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟



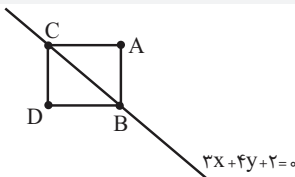
بیاسخ:

برای پیدا کردن شعاع دایره کافی است فاصله نقطه O را تا خط $d: 2x - y = 5$ بدست آوریم:

$$d: 2x - y = 5 \rightarrow 2x - y - 5 = 0.$$

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) - (2) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

مثال ۲۴: معادله یک قطر مربع $3x + 4y + 2 = 0$ و یک رأس آن $A(2, 3)$ است. مساحت این مربع را چقدر است؟



بیاسخ:

مختصات نقطه A روی معادله قطر مربع $3x + 4y + 2 = 0$ صدق نمی‌کند. پس معادله خط داده

شده قطر CB است.

فاصله نقطه A تا این خط به اندازه نصف قطر مربع است.

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) + 4(3) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$BC = 2AH = 8 \rightarrow \text{مساحت مربع} = \frac{BC^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

مثال ۲۵: فاصله نقطه $A(2a + 1, a - 1)$ از خط $-3x + 4y + 5 = 0$ برابر ۸ است. a چقدر است؟

بیاسخ:

$$AH = \frac{|-3(2a + 1) + 4(a - 1) + 5|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = 8 \rightarrow \frac{|-6a - 3 + 4a - 4 + 5|}{5} = 8$$

$$8 \rightarrow |-2a - 2| = 40 \rightarrow \begin{cases} -2a - 2 = 40 \rightarrow a = -21 \\ -2a - 2 = -40 \rightarrow a = 19 \end{cases}$$

تکنه: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط افقی $y = b$ برابر $d = |b - y_0|$.

تکنه: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط قائم $x = a$ برابر $d = |a - x_0|$.

مثال ۲۶: نقطه‌ای روی خط $y = 3x - 2$ بیابید که:

الف) فاصله آن تا خط $x = 1$ برابر ۲ باشد.

ب) فاصله آن تا خط $y = -1$ برابر ۳ باشد.

پاسخ:

الف) نقطه $A(x, 3x - 2)$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$d = 2 \rightarrow d = |a - x_0| \xrightarrow{x_0 = x, a = 1} |1 - x| = 2 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

ب) نقطه $A(x, 3x - 2)$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$d = 3 \rightarrow d = |b - y_0| \xrightarrow{y_0 = 3x - 2, b = -1} |-1 - (3x - 2)| = 3 \rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تکنه: فاصله دو خط موازی $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{cases}$ برابر است با:

مثال ۲۷: فاصله دو خط موازی $x + 2y = 1$ و $3x + 6y - 2 = 0$ چقدر است؟

$$D: x + 2y = 1 \rightarrow x + 2y - 1 = 0$$

$$D': 3x + 6y - 2 = 0 \xrightarrow{\div 3} x + 2y - \frac{2}{3} = 0 \rightarrow D \parallel D'$$

$$\text{فاصله دو خط موازی } d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d = \frac{|-1 - (-\frac{2}{3})|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dots\dots\dots$$

نمرینان:

- ۱- چند نقطه روی خط $y = x + 1$ یافت می‌شود که مجموع فواصلشان از دو نقطه $(1, 2)$ و $(0, 1)$ برابر ۲ باشد.
- ۲- فاصله نقطه تلاقی دو خط $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = x - 6 \end{cases}$ از مبدأ مختصات چقدر است؟
- ۳- اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط $\begin{cases} 2y + x = 3 \\ 3y + x = 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ است نوع مثلث را بیابید.
- ۴- نقاط $A(8, -1)$ و $B(3, 4)$ دو رأس مقابل یک مربع می‌باشند، محیط و مساحت مربع چقدر است؟
- ۵- خط به معادله $(m + 3)x + (2m - 1)y = 7$ به ازای هر m از نقطه ثابتی می‌گذرد فاصله این نقطه از نقطه $(1, -1)$ چقدر است؟
- ۶- نقاط $A(2, a)$ و $B(0, 3)$ و $C(-2, 3)$ رئوس مثلث ABC هستند. a را چنان بیابید که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین باشد.
- ۷- خط به معادله $x - y = 2$ محورهای مختصات را در A و B قطع می‌کند فاصله AB از $(0, \frac{1}{3})$ چقدر است؟
- ۸- طول میانه نظیر رأس A در مثلث ABC یا رئوس $A(1, 1)$ و $B(0, 0)$ و $C(3, -2)$ را بدست آورید.
- ۹- به ازای چه مقادیر از m و n دو نقطه $A(-n, m)$ و $B(2n, -2)$ نسبت به نقطه $M(3n - 1, m + n)$ قرینه یکدیگرند.
- ۱۰- قرینه نقطه $A(2, 1)$ را نسبت به نقطه $M(4, -1)$ بیابید.
- ۱۱- نقاط $A(3, 5)$ و $B(2, 3)$ دو رأس مثلث ABC می‌باشند. مختصات رأس C را چنان بیابید که میانه‌های مثلث یکدیگر را روی نیم‌ساز ناحیه دوم و به طول ۲- قطع کند.
- ۱۲- نقاط $A(1, -1)$ و $B(-2, 3)$ و $C(3, 5)$ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند مختصات نقطه D را بیابید.
- ۱۳- نقطه $A(6, 1)$ یک رأس متوازی‌الاضلاع و معادلات دو ضلع آن $\begin{cases} 2y - 3x = 12 \\ 3y + x = 7 \end{cases}$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر را بیابید.
- ۱۴- اگر $A(1, 2)$ و $B(-2, 3)$ و $C(m - 1, 2n)$ رئوس مثلث باشد و $G(-1, 3)$ محل تلاقی میانه‌ها $m + n$ چقدر است؟
- ۱۵- اگر $A(m - 2, 0)$ و $B(m, 2m)$ و فاصله C وسط AB از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ باشد. m چقدر است؟
- ۱۶- نقاط $A(2\beta, \beta)$ و $B(\beta + 3, \beta - 4)$ دو رأس مثلث ABC هستند و معادله میانه نظیر رأس C خط $y = 5$ است. مختصات وسط AB را بیابید.
- ۱۷- اگر خطی به معادله $(m + 1)y = x + 2$ بر خط به معادله $y = (2m + 1)x + 1$ عمود باشد m چقدر است؟
- ۱۸- خطوط $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ ax - y + 1 = 0 \end{cases}$ معادلات قطرهای یک لوزی هستند طول مرکز تقارن لوزی را بیابید.
- ۱۹- خطوط $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ معادله دو ارتفاع مثلث ABC هستند و مختصات رأس A در مثلث $(7, 5)$ است. شیب ضلع BC را بیابید.
- ۲۰- معادله سه ضلع یک مثلث $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \\ x = 1 \end{cases}$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد را بیابید.
- ۲۱- اگر $A(2, 3)$ و $B(4, b)$ دو نقطه دلخواه باشند و خط $y = -x + a$ معادله عمودمنصف آن‌ها باشد، $a + b$ چقدر است؟
- ۲۲- خطوط $\begin{cases} y - 2x + 3 = 0 \\ 2y + x - 4 = 0 \end{cases}$ دو ضلع مربع هستند که مبدأ مختصات مرکز آن می‌باشد، مساحت مربع چقدر است؟

- ۲۳- بر روی خط $x + y = 1$ نقطه‌ای را پیدا کنید که فاصله‌اش از خط $3x + 4y - 1 = 0$ برابر ۲ باشد.
- ۲۴- دو خط وجود دارند که فاصله آن‌ها از خط $3x + 4y = 5$ برابر ۲ است. اختلاف عرض از مبدأ آن‌ها چقدر است؟
- ۲۵- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ یک رأس مستطیل نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت مستطیل را بیابید.
- ۲۶- یک ضلع مربعی منطبق بر خط $y = x + 2$ و نقطه $A(3, -1)$ یک رأس آن است. اندازه قطر مربع را بیابید.
- ۲۷- اگر فاصله $A(1, 1)$ از خط $y = x + m$ برابر $2\sqrt{2}$ باشد. m چقدر است؟
- ۲۸- معادلات دو ضلع مربعی به صورت $x - 2y + 2 = 0$ و $3x - 6y - 2 = 0$ است. مساحت مربع چقدر است؟
- ۲۹- نقاط $A(1, -2)$ و $B(0, 1)$ و $C(4, 7)$ سه رأس یک مثلث هستند اندازه ارتفاع AH چقدر است؟
- ۳۰- فاصله مبدأ مختصات از خط $2y + m = mx + 4$ برابر ۲ است. این خط محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند.
- ۳۱- اگر $y = -\frac{3}{4}x + 1$ و $3x + 4y + a = 0$ دو ضلع یک مربع با محیط ۲۰ باشد. مقدار a چقدر است؟
- ۳۲- فاصله نقطه A واقع بر نیم‌ساز ناحیه اول از خط به معادله $2y = -x + 1$ برابر $\sqrt{5}$ است. طول نقطه A چقدر است؟
- ۳۳- معادلات اضلاع مثلثی $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 2x - 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ است، طول ارتفاع AH چقدر است؟



تست‌های درس پنجم (آشنایی با هندسه تحلیلی)

۱۱۵- دو نقطه‌ی $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ و خط به معادله‌ی $y = x - 1$ ، در صفحه‌ی محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطه‌ی M بر روی خط مفروض، با کدام طول انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه‌ی مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟ (سراسری-ریاضی ۹۳)

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 3

۱۱۶- نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشد. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۰)

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 3)$

۱۱۷- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۲)

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

۱۱۸- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس مستطیل نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۰)

- (۱) $7/2$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

۱۱۹- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ ، کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۲)

- (۱) 6 (۲) $6/5$ (۳) 7 (۴) $7/5$

۱۲۰- نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟ (سراسری-تجربی ۹۳)

- (۱) 40 (۲) 45 (۳) 75 (۴) 80

۱۲۱- خطی از نقاط $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ می‌گذرد و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی وسط AB از مبدأ چقدر است؟ (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (۴) $\frac{25}{4}$

۱۲۲- معادله‌ی سه ضلع مثلثی به صورت $AB: x + 2y = 3$ ، $AC: y = 2x - 1$ و $BC: x + y = 4$ است. طول ارتفاع AH کدام است؟ (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۳- فاصله‌ی خط $y = \sqrt{3}x - 1$ از خطی موازی آن که از مبدأ مختصات می‌گذرد، چقدر است؟ (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) $0/5$ (۲) $0/25$ (۳) $0/2$ (۴) $0/1$

۱۲۴- نقاط $A(-2, 3)$ و $B(0, -2)$ و $C(2, 0)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه‌ی AM کدام است؟ (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) $2\sqrt{5}$

۱۲۵- دو ضلع یک مربع بر دو خط به معادلات $2x + \sqrt{5}y = 3$ و $5y + 2\sqrt{5}x = 0$ قرار دارند، محیط این مربع چقدر است؟ (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) 1 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۱۲۶- معادله‌ی دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع $2x + y = 1$ و $2x + y = 5$ می‌باشند. اگر یک رأس آن نقطه‌ی $(-3, 2)$ باشد، فاصله محل برخورد قطرهای آن از مبدأ مختصات به کدام فاصله است؟ (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) 3 (۲) 6 (۳) $\sqrt{5}$ (۴) 5

۱۲۷- دو نقطه بر روی نیم‌ساز ربع اول و سوم وجود دارند که از خط $x + 2y = 0$ به فاصله‌ی $2\sqrt{5}$ هستند. اگر این دو نقطه را A و B بنامیم، مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟ نقطه‌ی C روی محور y ها به عرض 3 است. (گزینه ۲-تجربی ۹۲)

- (۱) 10 (۲) 20 (۳) $\frac{190}{3}$ (۴) $\frac{95}{3}$

۱۲۸- خطی از مبدأ می‌گذرد و بر خطی که $A(2, 1)$ را به $B(0, -3)$ وصل می‌کند، عمود است. این خط، خط $x = 4$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۸ (۴) -۸

(گزینه ۲ - تهری ۹۲)

۱۲۹- دو نقطه روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارند که از نیم‌ساز ربع اول و سوم به فاصله $4\sqrt{2}$ هستند. طول این نقاط کدام است؟

(گزینه ۲ - تهری ۹۴)

- (۳) ۹ و -۷ (۲) ۷ و -۹ (۳) ۹ و ۷ (۴) ± 8

(گزینه ۲ - تهری ۹۴)

۱۳۰- مرکز مربعی، نقطه‌ی $A(1, 4)$ و معادله‌ی یک ضلع آن $4x - 3y = 1$ است. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $3/24$ (۲) $3/6$ (۳) $9/64$ (۴) $12/96$

۱۳۱- رئوس مثلثی نقاط $A(3, 1)$ ، $B(1, 2)$ و $C(-1, 4)$ هستند. امتداد ارتفاع CH محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(گزینه ۲ - تهری ۹۴)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

(گزینه ۲ - تهری ۹۴)

۱۳۲- مثلثی با رئوس $A(2, 6)$ ، $B(-2, 5)$ و $C(2, 3)$ مفروض است. طول میانه‌ی AM کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۸

(گزینه ۲ - تهری ۹۴)

۱۳۳- اضلاع مربعی روی خطوط $x - y = 2$ و $y = x + 1$ قرار دارند. طول قطر آن کدام است؟

- (۲) ۳ (۲) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (۴) ۶

(گزینه ۲ - تهری ۹۵)

۱۳۴- اگر فاصله نقطه $A\left(\frac{-1}{2}\right)$ از خط $3y = 4x + a$ برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۳) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲

(سنجش-ریاضی ۹۱)

۱۳۵- خط به معادله $y = ax + b$ قرینه خط $3y - 4x = 2$ نسبت به $y = 2$ است $a.b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{32}{9}$ (۲) $-\frac{40}{9}$ (۳) $\frac{16}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۱۳۶- نقطه $A(6, 1)$ یک رأس متوازی‌الاضلاع و معادلات دو ضلع آن $2y - 3x = 12$ و $2y + x = 7$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۱)

- (۴) $(2, 3)$ (۲) $(2, 2)$ (۳) $(3, 2)$ (۴) $(3, 3)$

۱۳۷- دسته خطوط به معادلات $mx + (2m - 1)y + 3m = 1$ از نقطه‌ی ثابت A می‌گذرند، فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۲)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۳۸- نقطه‌ی M با کدام طول بر روی خط $y = 2x - 1$ انتخاب شود به طوری که مجموع فواصل آن از دو نقطه $(2, 0)$ و $(0, 1)$ برابر ۳ باشد؟

(سنجش-ریاضی ۹۴)

- (۱) $0/8 \pm \frac{2\sqrt{7}}{15}$ (۲) $1 \pm \frac{2\sqrt{11}}{15}$ (۳) $0/8 \pm \frac{2\sqrt{11}}{15}$ (۴) $1 \pm \frac{2\sqrt{7}}{15}$

۱۳۹- دو ضلع متوازی‌الاضلاعی منطبق بر خطوط $2y + 3x + 1 = 0$ ، $3y + 2x + 4 = 0$ و نقطه‌ی $(3, 4)$ یک رأس آن است. مختصات مرکز آن کدام است؟

(سنجش-ریاضی ۹۴)

- (۱) $(2, 3)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(4, 3)$ (۴) $(2, 1)$

پاسخنامه

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱

معادلات درجه دوم

۲

معادلات گویا و گنگ

۳

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۴

آشنایی با هندسه تحلیلی

۵

فصل



پاسخنامه درس اول (مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی)

۱- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} S_{20} = 3S_{12} \\ a_3 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{20}{2}(2a+19d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a+11d) \\ a+2d=6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a+d=0 \\ a+2d=6 \end{cases} \rightarrow a=-2, \quad d=4 \rightarrow a_{10} = a+9d = 34$$

۲- گزینه‌ی ۱

صورت کسر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت t و مخرج کسر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت t^3 است.

$$\frac{t^1+t^1+\dots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1} = \frac{\frac{t^{12}-1}{t-1}}{\frac{t^{12}-1}{t^3-1}} = \frac{t^3-1}{t-1} = t^2+t+1 \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = 2t+1 \xrightarrow{\text{بفرض توان ۲}} 4t^2+4t+1=5 \rightarrow t^2+t=1 \quad (2)$$

$(1), (2) \rightarrow \text{جواب} = 1+1=2$

۳- گزینه‌ی ۳

اگر تعداد جملات دنباله را $n = 2k$ با قدر نسبت q در نظر بگیریم در این صورت جملات فرد این دنباله خود یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q^2 و تعداد آن‌ها k می‌باشد پس داریم:

(مجموع کل جملات) - (مجموع جملات فرد) $\times 3$

$$3 \times \frac{1-(q^2)^k}{1-q^2} = \frac{1-(q^2)^k}{1-q} \Rightarrow \frac{3}{(1-q)(1+q)} = \frac{1}{1-q} \rightarrow q+1=3 \rightarrow q=2$$

۴- گزینه‌ی ۴

$$a_7+a_8+\dots+a_{17}+a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 9 - (-9) = 18$$

۵- گزینه‌ی ۲

$4, a_2, a_3, a_4, 324$

$$a_5 = 324 \rightarrow 4 \times q^4 = 324 \rightarrow q^4 = 81 \rightarrow q = 3 \quad (\text{اعداد مثبت هستند})$$

$$S_5 = \frac{4(3^5-1)}{3-1} = 484$$

۶- گزینه‌ی ۳

صورت کسر مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-t)$ و تعداد جملات ۹ می‌باشد و مخرج کسر مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-t^3)$ و تعداد جملات ۳ تا می‌باشد.

$$\frac{t^8 - t^7 + t^6 \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{\frac{1((-t)^9 - 1)}{-t - 1}}{\frac{1((-t^3)^3 - 1)}{-t^3 - 1}} = \frac{-(t^3 + 1)}{-(t + 1)} = t^2 - t + 1 \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow 2t - 1 = \sqrt{17} \xrightarrow{\text{بهاره توان ۲}} 4t^2 - 4t + 1 = 17 \rightarrow t^2 - t = 4 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که حاصل عبارت برابر است با $4 + 1 = 5$

۷- گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 10 \\ a_4 + a_5 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 10 \\ 2a_1 + 7d = 12 \end{cases} \rightarrow d = \frac{16}{15}$$

۸- گزینه‌ی ۴

جمله‌ی هفتم (a_7) وسط دو جمله‌ی a_3 و a_{11} و همچنین وسط دو جمله‌ی a_6 و a_8 می‌باشد پس داریم:

$$a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} = 2a_7 + 2a_7 = 4a_7 = 4 \times 20 = 80$$



۹- گزینه‌ی ۱

اگر جمله‌ی وسط این سه جمله را a بگیریم در این صورت این سه جمله را می‌توان به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر گرفت پس داریم:

$$(a-d) + a + (a+d) = 24 \rightarrow 3a = 24 \rightarrow a = 8$$

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 120 \xrightarrow{a=8} (\lambda-d) \times 8 \times (\lambda+d) = 120 \rightarrow (64-d^2) = 15$$

$$\rightarrow -d^2 = -64 + 15 \rightarrow d^2 = 49 \rightarrow d = -7$$

۱۰- گزینه‌ی ۲

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \rightarrow 2m - 1 - m = m - 4 - 2m + 1 \rightarrow m = -1$$

$$\rightarrow a_1 = -1, a_2 = -3 \rightarrow d = -3 - (-1) = -2$$

$$S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} = \frac{9(-2 - 16)}{2} = -81$$

۱۱- گزینه‌ی ۱

$$d = \frac{a_{12} - a_5}{12 - 5} = \frac{33 - 12}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 12 \rightarrow a_1 + 4 \times 3 = 12 \rightarrow a_1 = 0$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = S_9 - S_4 = \frac{9(2 \times a_1 + 8d)}{2} - \frac{4(2 \times a_1 + 3d)}{2} = \frac{9}{2}(24) - \frac{4}{2}(9) = 90$$

۱۲- گزینه‌ی ۳

$$S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9(d+2))}{2} = \frac{10(2a_1 + 9d + 18)}{2} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} + \frac{180}{2} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) + 90 = S_{10}(\text{قدیم}) + 90$$

۱۳- گزینه‌ی ۲

$$a_9 = \frac{1}{2}a_5 \rightarrow a_1 + 8d = \frac{1}{2}(a_1 + 4d) \rightarrow 2a_1 + 16d = a_1 + 4d \rightarrow a_1 = -12d \quad (1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 0 \xrightarrow{(1)} \frac{n}{2}(-24d + (n-1)d) = 0$$

$$\rightarrow \frac{n}{2}(-24d + nd) = 0 \rightarrow \frac{n}{2}(d(-24 + n)) = 0 \xrightarrow{n, d \neq 0} -24 + n = 0 \rightarrow n = 24$$

۱۴- گزینه ۱

$$f, a, q, b \rightarrow a_r = a_1 q^r \rightarrow q^r = \frac{q}{f} \quad (1)$$

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{8}{2} \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{4}{2} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}} = \frac{(1-q^8)(1+q^4)}{1-q^4} = 1+q^4 \xrightarrow{(1)} 1 + \left(\frac{q}{f}\right)^4 = \frac{97}{16}$$

۱۵- گزینه ۱

$$a_n = 2n - 5 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = -1 \end{cases} \rightarrow d = 2$$

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(-6 + (n-1)2) = \frac{n}{2}(2n-8) = n(n-4) \\ S_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) = n(-6 + (2n-1)2) = n(4n-8) = 4n(n-2) \end{cases}$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{4n(n-2)}{n(n-4)} = \frac{4n-8}{n-4}$$

۱۶- گزینه ۳

$$S_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) = n(2a_1 + 2nd - d) = 2na_1 + 2n^2d - nd = 2n^2d + (2a_1 - d)n$$

$$\xrightarrow{S_{2n} = 2n^2 + 5n} d = 1, \quad 2a_1 - d = 5$$

$$\rightarrow a_1 = 3$$

۱۷- گزینه ۱

صورت کسر یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) و قدر نسبت $-q^2$ و تعداد جملات ۸ تا می‌باشد و مخرج کسر یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) و قدر نسبت q^4 و تعداد جملات ۴ تا می‌باشد.

$$\frac{1 - q^2 + q^4 - \dots - q^{16}}{1 + q^4 + q^8 + q^{12}} = \frac{1 \left(\frac{1 - (-q^2)^8}{1 - (-q^2)} \right)}{1 \left(\frac{1 - (q^4)^4}{1 - q^4} \right)} = \frac{1 - q^{16}}{1 + q^4} = \frac{(1 - q^2)(1 + q^2)}{1 + q^4} = 1 - q^2 \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$q = 1 - \sqrt{2} \rightarrow q^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} \rightarrow q^2 = 3 - 2\sqrt{2} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که حاصل عبارت برابر است با: $-2 + 2\sqrt{2}$

۱۸- گزینه‌ی ۴

دنباله‌ی $a_3, a_6, a_9, \dots, a_3$ یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_3 و قدر نسبت $\lambda = \frac{a_6}{a_3} = \frac{a_9(2)^2}{a_3} = 8$ می‌باشد اگر مجموع جملات این دنباله را با S' نمایش دهیم داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{a_3 \times \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1}}{a_1 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1}} = \frac{\cancel{a_1} \times (2)^2 \times \frac{2^{10} - 1}{2}}{\cancel{a_1} \times \frac{2^{10} - 1}{1}} = \frac{4}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی ۳

$$a_3 + a_{13} = 24 \xrightarrow{a_3 + a_{13} = a_1 + a_{15}} a_1 + a_{15} = 24$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15 \times 24}{2} = 180$$

۲۰- گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} a_1 - a_5 = 20 \rightarrow a_1 + 4d - a_1 - 4d = 20 \rightarrow 0d = 20 \rightarrow d = 4 \\ a_8 + a_{12} = 76 \rightarrow a_1 + 7d + a_1 + 11d = 76 \rightarrow 2a_1 + 18d = 76 \xrightarrow{d=4} \rightarrow a_1 = 2 \end{cases}$$

$$S_n > 200 \rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 200 \rightarrow \frac{n}{2}(2 + 4n - 4) > 200$$

$$\rightarrow 2n^2 > 200 \rightarrow n^2 > 100 \rightarrow n > 10 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 11$$

پس باید حداقل ۱۱ جمله را جمع کنیم.

۲۱- گزینه‌ی ۲

$$a_{19} = 2a_3 \rightarrow a_1 + 18d = 2(a_1 + 2d) \rightarrow a_1 + 14d = 0 \rightarrow a_1 = -14d \quad (1)$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} \xrightarrow{S_n=0} 2a_1 + (n-1)d = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow -14d + (n-1)d = 0 \rightarrow d(-14 + (n-1)) = 0 \rightarrow (n-1) - 14 = 0 \rightarrow n = 15$$

۲۲- گزینه‌ی ۳

$$a_n = an + 3 \xrightarrow{n=1} \begin{cases} a_1 = a + 3 \\ S_1 = b + 3 = a_1 \end{cases} \rightarrow a + 3 = b + 3 \rightarrow a - b = 0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{n=2} \begin{cases} a_2 = 2a + 3 \\ S_2 = 2b + 6 = a_1 + a_2 \end{cases} \rightarrow 2b + 6 = a + 3 + 2a + 3 \rightarrow 2a - 2b = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow a = 0, b = 0$$

 پس $a + b = 0$ می‌باشد.

۲۳- گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 5 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 17 \end{cases} \rightarrow a_1 = -1, d = 2$$

$$S_{18} = \frac{18(2a_1 + (18-1)d)}{2} = \frac{18(-2 + 34)}{2} = 270$$

۲۴- گزینه‌ی ۳

$$a_8 = S_8 - S_7 = (8^2 - 3 \times 8) - (7^2 - 3 \times 7) = 40 - 28 = 12$$

۲۵- گزینه‌ی ۲

صورت کسر یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) و قدر نسبت $(-t)$ و دارای ۱۲ جمله است. مخرج کسر یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) و قدر نسبت $(-t^3)$ و دارای ۴ جمله است.

$$\frac{1-t+t^2-t^3+\dots-t^{11}}{1-t^3+t^6-t^9} = \frac{1 \cdot \frac{((-t)^{12}-1)}{-t-1}}{1 \cdot \frac{((-t^3)^4-1)}{-t^3-1}} = \frac{\cancel{t^{12}}-1}{-(t+1)} = \frac{t^2-t+1}{-(t^3+1)} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$t = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \rightarrow 2t = 1-\sqrt{21} \rightarrow 2t-1 = -\sqrt{21} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4t^2 - 4t + 1 = 21 \rightarrow 4t^2 - 4t = 20 \rightarrow t^2 - t = 5 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که حاصل عبارت برابر ۶ است.

۲۶- گزینه‌ی ۱

مجموع $n+2$ جمله اول دنباله $1, 3, 5, 7, \dots$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{n+2}{2} (2(1) + (n+2-1) \times 2) = \frac{n+2}{2} (2+2n+2) = \frac{(n+2)2(n+2)}{2} = (n+2)^2$$

۲۷- گزینه‌ی ۳

دنباله‌ی داده شده دنباله‌ی حسابی با جمله اول ۵ و قدر نسبت ۴ می‌باشد پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{2} (10 + (n-1) \times 4) > 900 \rightarrow \frac{n}{2} \times (6 + 4n) > 900$$

$$\rightarrow n(3+2n) > 900 \rightarrow 2n^2 + 3n - 900 > 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{cases} n > 21 \\ n < \frac{-90}{4} \text{ (غیرقابل قبول است)} \end{cases}$$

پس باید حداقل ۲۲ جمله را جمع کرد تا حاصل از ۹۰۰ بیشتر شود.

۲۸- گزینه‌ی ۲

اگر جمله اول دنباله هندسی $a_1 = 2$ و مجموع سه جمله آن $a_1 + a_2 + a_3 = 26$ در نظر بگیریم در این صورت یک دنباله هندسی به صورت a_1, t_1, a_2, t_2, a_3 طبق فرض مسئله می‌سازیم پس داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 \rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 26 \rightarrow \frac{2 \cancel{(1-q)} (1+q+q^2)}{\cancel{1-q}} = 26$$

$$\rightarrow 1+q+q^2 = 13 \rightarrow q^2+q-12=0 \rightarrow \begin{cases} q=3 \\ q=-4 \text{ (غیرقابل قبول است)} \end{cases}$$

پس سه جمله اول دنباله به صورت ۲، ۶، ۱۸ می‌باشد حال جملات دنباله‌ی جدید را پیدا می‌کنیم:

$$t_1^2 = a_1 a_2 \rightarrow t_1^2 = 2 \times 6 = 12 \rightarrow t_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$t_2^2 = a_2 a_3 \rightarrow t_2^2 = 6 \times 18 = 108 \rightarrow t_2 = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$S_5 = a_1 + t_1 + a_2 + t_2 + a_3 = 2 + 2\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 18 = 26 + 8\sqrt{3} = 2(13 + 4\sqrt{3})$$

پاسخنامه درس دوم - (معادلات درجه دوم) فصل اول

۲۹ - گزینه ۲

اگر خطی بر یک منحنی مماس باشد باید معادله تلاقی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = (m+3)x^2 + mx \\ y = 2x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \\ (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0 \end{cases}$$

 حال Δ معادله‌ی تلاقی را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\Delta = 0 \rightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(4)(m+3) = 0 \rightarrow m = -2, 22$$

۳۰ - گزینه ۳

$$x(\Delta x + 3) = 2 \rightarrow \Delta x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{\Delta} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{\Delta} \end{cases}$$

 حال معادله درجه‌ی دومی می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2}$ باشد.

$$\begin{cases} S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(-\frac{3}{\Delta})^2 - 2(-\frac{2}{\Delta})}{(-\frac{2}{\Delta})^2} = \frac{29}{4} \\ P = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{2}{\Delta}}{-\frac{2}{\Delta}}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 29x + 25 = 0$$

 پس $k = -29$ می‌باشد.

۳۱ - گزینه ۱

برای آنکه تابع درجه دوم داده شده از ناحیه اول نگذرد دو حالت زیر وجود دارد:

 حالت اول: $\Delta > 0$ و ضریب X^2 منفی ($a - 3 < 0$)

 اگر $\Delta > 0$ باشد معادله حتماً دارای دو ریشه منفی است پس:

$$\begin{cases} \Delta = a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} a > 2 \text{ یا } a < -6 & (1) \\ P > 0 \rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{a-3} > 0 \rightarrow a-3 < 0 \rightarrow a < 3 & (2) \\ S < 0 \rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-a}{a-3} < 0 \xrightarrow{(2)} -a > 0 \rightarrow a < 0 & (3) \end{cases}$$

 از بازه‌های (۱) و (۲) و (۳) که اشتراک بگیریم، داریم $a < -6$.

 حالت دوم: $\Delta \leq 0$ و ضریب X^2 منفی ($a - 3 < 0$)

$$\Delta = a^2 - 4(a-3)(-1) \leq 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -6 \leq a \leq 2 \quad (5)$$

 از بازه‌های (۴) و (۵) که اشتراک بگیریم، داریم $-6 \leq a \leq 2$.

 اجتماع دو حالت بالا مجموعه جواب می‌باشد پس $a \leq 2$.

۳۲ - گزینه‌ی ۳

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4} \\ P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{-2} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۳۳ - گزینه‌ی ۴

باید معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز منفی باشد پس داریم:

$$\begin{cases} ۱) \Delta > 0 \rightarrow (2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0 \rightarrow 4(m-5)^2 > 0 \rightarrow m \neq 5 \\ ۲) S < 0 \rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -1 < m < 2 \\ ۳) P > 0 \rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} m > 2 \end{cases}$$

 حال اگر از سه مجموعه‌ی فوق اشتراک بگیریم مجموعه جواب \emptyset می‌باشد.

۳۴ - گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \rightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (۱) \\ S > 0 \rightarrow S = \frac{2(a-2)}{1} > 0 \rightarrow a > 2 \quad (۲) \\ P > 0 \rightarrow P = \frac{14-a}{1} > 0 \rightarrow a < 14 \quad (۳) \end{cases}$$

 از (۱) و (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم پس $5 < a < 14$.

۳۵ - گزینه‌ی ۴

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{m+1}{2} = S \\ \alpha\beta = \frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16} = P \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = 2 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right) + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{2}{4}} = 2$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{m+2}{2}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{m+2}{2} = 4 \rightarrow m = 6$$

۳۶- گزینه‌ی ۲

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \\ P = (\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2) = (\alpha\beta)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0 \xrightarrow{\times 8} 8x^2 + 6x - 1 = 0$$

 پس $k = 6$ می‌باشد.

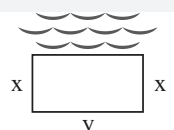
۳۷- گزینه‌ی ۲

 اگر ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + m = 0$ را α و β در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases} \alpha - \frac{\beta}{2} = 5 \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 8 \end{cases} \rightarrow \beta = 2, \alpha = 6$$

 از طرفی $\alpha\beta = m$ پس $m = 12$.

۳۸- گزینه‌ی ۲



$$\begin{cases} S = xy \\ 2x + y = 88 \rightarrow y = 88 - 2x \end{cases} \rightarrow S = x(88 - x) - 2x^2 + 88x$$

حال طول رأس سهمی فوق را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-88}{2(-2)} = 22 \rightarrow y = 88 - 2(22) = 44$$

$$S = 22 \times 44 = 968 \text{ ماکزیمم}$$

۳۹- گزینه‌ی ۱

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} ۱) \Delta > 0 \rightarrow \Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) > 0 \rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0 \rightarrow a > -1 \text{ یا } a < -9 \\ ۲) P > 0 \rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \rightarrow a < 0 \\ ۳) S < 0 \rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -3 \end{cases}$$

 حال از سه مجموعه فوق اشتراک می‌گیریم پس $a < -9$ است.

۴۰- گزینه‌ی ۱

 معادله باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد یعنی $P < 0$ پس داریم:

$$P = \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} m < -2 \text{ یا } m > 1$$

۴۱- گزینه‌ی ۳

α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ است پس $\alpha\beta = -1$ و $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ پس داریم:

$$8x^2 - mx - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = \frac{m}{8} \rightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{m}{8} \rightarrow \\ \alpha^3\beta^3 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{8} \rightarrow \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{m}{8} \rightarrow m = 13$$

۴۲- گزینه‌ی ۳

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \rightarrow x - \sqrt{3} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{بهنوان}^2} x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 2 \rightarrow$$

$$x^2 + 1 = 2\sqrt{3}x \xrightarrow{\text{بهنوان}^2} x^4 + 2x^2 + 1 = 12x^2 \rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

۴۳- گزینه‌ی ۳

اگر X ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 + mx - m - 1 = 0$ باشد و y ریشه معادله جدید، آن‌گاه $y = x - 2$ پس $x = y + 2$ است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$(y+2)^2 + m(y+2) - m - 1 = 0 \rightarrow y^2 + 4y + 4 + my + 2m - m - 1 = 0$$

$$\rightarrow y^2 + (m+4)y + m + 3 = 0 \xrightarrow{\text{تغییرمتغیر}} x^2 + (m+4)x + m + 3 = 0$$

۴۴- گزینه‌ی ۲

دو عدد مورد نظر را X و Y در نظر می‌گیریم پس داریم: $2X - Y = 6$

$$\begin{cases} 2X - Y = 6 \rightarrow Y = 2X - 6 \\ XY = X(2X - 6) = 2X^2 - 6X \end{cases}$$

برای پیدا کردن کمترین مقدار حاصلضرب کافی است طول رأس معادله درجه دوم فوق را محاسبه کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2(2)} = \frac{3}{2} \rightarrow y = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 6 = -3$$

$$|x - y| = \left|\frac{3}{2} - (-3)\right| = \left|\frac{3}{2} + 3\right| = \left|\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

۴۵- گزینه‌ی ۳

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}, \quad x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 3\alpha = 1 \\ \beta^2 + 3\beta = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 + 3\beta + 2} = \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + 3\alpha) + 2} + \frac{1}{\beta(\beta^2 + 3\beta) + 2} = \frac{1}{\alpha(1) + 2} + \frac{1}{\beta(1) + 2}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 2} + \frac{1}{\beta + 2} = \frac{\beta + 2 + \alpha + 2}{(\alpha + 2)(\beta + 2)} + \frac{(\alpha + \beta) + 4}{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4} = \frac{-3 + 4}{-1 - 6 + 4} = -\frac{1}{3}$$

۴۶- گزینه‌ی ۴

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن به صورت $\alpha^2 - 1$ و $\beta^2 - 1$ باشد.

$$\begin{cases} S = (\alpha^2 - 1) + (\beta^2 - 1) = (\alpha^2 + \beta^2) - 2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2 = 9 - 2 - 2 = 5 \\ P = (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = (\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1 = (\alpha\beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta + 1 = -5 \end{cases}$$

پس داریم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 5 = 0.$$

۴۷- گزینه ۱

ابتدا با جابجایی ضرایب معادله‌ای را پیدا می‌کنیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله $2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ باشد:

$$2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0 \rightarrow bx^3 + ax^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3bx^3 + 3ax^2 - 9x + 6 = 0.$$

با توجه به اینکه معادله‌ی $cx^3 + dx^2 - 9x + 6 = 0$ نیز ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله داده شده است پس باید:

$$\begin{cases} c = 3b \\ d = 3a \end{cases} \rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a+b}{3b+3a} = \frac{1}{3}$$

۴۸- گزینه ۲

$$2x(2-x) = -3 \rightarrow -2x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{28}{9} \\ P = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{28}{9}x + \frac{4}{9} = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 - 28x + 4 = 0.$$

۴۹- گزینه ۳

می‌دانیم $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ پس داریم:

$$(4x + 3y)^2 \leq (4^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \rightarrow 7^2 \leq 25(x^2 + y^2) \rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$$

۵۰- گزینه ۴

$$3x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{3} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

کافی است در معادله‌ی خواسته شده که ریشه‌های آن $\frac{2\alpha}{\beta}$ و $\frac{2\beta}{\alpha}$ است فقط S را پیدا کنیم.

$$S = \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\beta} = \frac{2\beta^2 + 2\alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{2((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha\beta} = -\frac{14}{3}$$

پس $k = \frac{14}{3}$ است.

۵۱- گزینه‌ی ۱

چون ریشه‌های معادله معکوس یکدیگرند پس $P = 1$ است بنابراین:

$$P = \frac{a^2 - 6}{a} = 1 \rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow a = 3 \text{ یا } a = -2$$

اگر $a = 3 \rightarrow 3x^2 + 5x + 3 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$ غیرقابل قبول است

اگر $a = -2 \rightarrow -2x^2 + 5x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 9 > 0 \rightarrow$ قابل قبول است

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0 \rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{9}}{|-2|} = \frac{3}{2}$$

۵۲- گزینه‌ی ۳

$$2x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} (2\alpha + 1) + (2\beta + 1) = \frac{-b}{a} = -2 \rightarrow 2(\alpha + \beta) + 2 = -2 \rightarrow \alpha + \beta = -2 \\ (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4(\alpha\beta) + 2(\alpha + \beta) + 1 = -\frac{3}{2} \rightarrow \\ 4(\alpha\beta) - 4 + 1 = -\frac{3}{2} \rightarrow \alpha\beta = \frac{3}{8} \end{cases}$$

حال معادله‌ی درجه دومی را می‌سازیم که ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ باشد.

$$\begin{cases} S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{\frac{3}{8}} = \frac{-16}{3} \\ P = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x + 8 = 0$$

۵۳- گزینه‌ی ۴

$$2x^2 - 5x - k = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{5}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

حال اگر ۲ واحد به ریشه‌ها اضافه کنیم ریشه‌ها به صورت $\alpha + 2$ و $\beta + 2$ تبدیل می‌شود پس داریم:

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) - \alpha\beta = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 - \alpha\beta = 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4 = 9$$

۵۴- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} y = ax^2 - x + 2 \\ y = x^2 + ax \end{cases} \rightarrow ax^2 - x + 2 = x^2 + ax \rightarrow (a-1)x^2 - (a+1)x + 2 = 0$$

مجموع ضرایب معادله‌ی فوق برابر با صفر است پس ریشه‌های آن به صورت $X_1 = 1$ و $X_2 = \frac{2}{a-1}$ است پس اگر $a-1 > 0$ باشد یعنی $a > 1$

هر دو ریشه‌ی معادله‌ی تلاقی مثبت است. واضح است که با این شرط عرض این نقاط نیز مثبت خواهد بود.

۵۵- گزینه‌ی ۲

حاصلضرب ریشه‌ها باید برابر با یک باشد (ریشه‌ها معکوس یکدیگرند) پس داریم:

$$P = 1 \rightarrow \frac{m^2 - 6}{m} = 1 \rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \rightarrow m = 3 \text{ یا } m = -2$$

 اگر $m = 3$ باشد معادله به صورت $3x^2 + 5x + 3 = 0$ است که ریشه ندارد پس $m = -2$ می‌باشد.

۵۶- گزینه‌ی ۱

$$x^4 + m(x^2 + 3) = m^2 - 2x^2 \rightarrow x^4 + (m+2)x^2 + (3m - m^2) = 0$$

$$\frac{x^2 = y}{\rightarrow y^2 + (m^2 + 2)y + (3m - m^2) = 0} \quad (1)$$

معادله‌ی درجه چهارم داده شده دارای دو جواب است پس باید معادله‌ی (۱) دارای دو جواب مختلف‌العلامه باشد که ریشه‌ی منفی آن برای معادله درجه چهارم جواب ندارد.

$$P < 0 \rightarrow P = \frac{3m - m^2}{1} < 0 \rightarrow m(3 - m) < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} m < 0 \quad m > 3$$

۵۷- گزینه‌ی ۱

$$2x^2 - 5x + m - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{5}{2} \\ \alpha\beta = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = 5 \rightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 5 \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = 5$$

$$\rightarrow \frac{-15}{4}(m-1) = 5 - \frac{125}{8} \rightarrow -\frac{15}{4}(m-1) = -\frac{15}{8} \rightarrow m-1 = \frac{\cancel{15}^2}{\cancel{4}^2} = \frac{17}{6}$$

$$\rightarrow m-1 = \frac{17}{6} \rightarrow m = \frac{17}{6} + 1 = \frac{23}{6}$$

۵۸- گزینه‌ی ۳

نمودار تابع درجه دوم باید محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌هایی مختلف‌العلامه قطع کند تا نمودار از چهار ناحیه دستگاه مختصات عبور کند.

$$P < 0 \rightarrow P = \frac{m^2 - 4}{1} < 0 \rightarrow m^2 - 4 < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -2 < m < 2$$

۵۹- گزینه‌ی ۱

 فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند:

$$2x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{5}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3x - m = 0$ به صورت $\beta - 2$ و $\alpha - 2$ است. حال ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$(\alpha - 2)(\beta - 2) = -\frac{m}{2} \rightarrow \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 = -\frac{m}{2} \rightarrow \frac{1}{2} - 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{m}{2}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{m}{2} \rightarrow m = 1$$

۶۰- گزینه‌ی ۴

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - (a+1)x + 2a = 0$ باشند:

$$2x^2 - (a+1)x + 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{a+1}{2} = S \\ \alpha\beta = \frac{2a}{2} = a = P \end{cases}$$

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{\frac{a+1}{2} - 2\sqrt{a}} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$\frac{a+1}{2} - 2\sqrt{a} = 3 \xrightarrow{\times 2} a - 4\sqrt{a} - 5 = 0 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 - 4t - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 5 \end{cases}$$

$$t = 5 \rightarrow \sqrt{a} = 5 \rightarrow a = 25$$

۶۱- گزینه‌ی ۴


$$2x^2 - (m+1)x + m - \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$$

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱) \Delta > 0 \rightarrow \Delta = (-2(m+1))^2 - 4(4)(2m-1) > 0 \rightarrow m^2 - 6m + 5 > 0 \rightarrow m < 1 \text{ یا } m > 5 \\ ۲) P > 0 \rightarrow \frac{2m-1}{4} > 0 \rightarrow 2m-1 > 0 \rightarrow m > \frac{1}{2} \\ ۳) S > 0 \rightarrow \frac{2(m+1)}{4} > 0 \rightarrow m > -1 \end{cases}$$

اگر از سه مجموعه فوق اشتراک بگیریم $m > 5$ خواهد بود.

۶۲- گزینه‌ی ۳

نمودار تابع باید به صورت  باشد پس Δ معادله‌ی درجه دوم $x^2 + ax + a^2 - 12 = 0$ برابر صفر است.

$$\Delta = a^2 - 4(a^2 - 12) = 0 \rightarrow -3a^2 + 48 = 0 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$$

۶۳- گزینه‌ی ۴

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $9x^2 - 25ax + 4a = 0$ باشند داریم:

$$9x^2 - 25ax + 4a = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{25a}{9} = S \\ \alpha\beta = \frac{4a}{9} = P \end{cases}$$

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \frac{1}{6} \rightarrow \sqrt{S - 2\sqrt{P}} = \frac{1}{6} \rightarrow \sqrt{\frac{25a}{9} - 2\sqrt{\frac{4a}{9}}} = \frac{1}{6} \xrightarrow{2 \cdot \frac{H}{4} U \frac{3}{4} M}$$

$$\frac{25a}{9} - 2 \times \frac{2}{3} \sqrt{a} = \frac{1}{36} \xrightarrow{\times 36} 100a - 48\sqrt{a} - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{a}=t}$$

$$10 \cdot t^2 - 48t - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{50} \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$t = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۶۴- گزینه‌ی ۲

$$\Delta x^4 - 42x^2 - 27 = 0 \rightarrow (\Delta x^2 + 3)(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x_2 + 1 = \frac{1}{2} \times (-3) + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow (x - \frac{5}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 8x - 5 = 0$$

۶۵- گزینه‌ی ۳

مجموع ضرایب معادله‌ی داده شده برابر صفر است. پس یکی از ریشه‌های آن ۱ می‌باشد بنابراین چند جمله‌ای داده شده بر $(x-1)$ بخش پذیر است.

$$x^3 + 3x^2 + (m-6)x - m + 2 = (x-1)(x^2 + 4x - 2 + m)$$

یا توجه به فرض مسئله باید معادله‌ی درجه دوم $x^2 + 4x - 2 + m = 0$ دارای دو ریشه منفی باشد.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(-2 + m) > 0 \rightarrow 24 - 4m > 0 \rightarrow m < 6 & (1) \\ S < 0 \rightarrow -4 < 0 \\ P > 0 \rightarrow -2 + m > 0 \rightarrow m > 2 & (2) \end{cases}$$

اگر از دو مجموعه‌ی (۱) و (۲) اشتراک بگیریم داریم $2 < m < 6$.

۶۶- گزینه‌ی ۴

تابع محور X ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس معادله‌ی $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4(2a - 3) > 0 \rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \rightarrow a < 2 \text{ یا } a > 6 \\ S > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \\ P > 0 \rightarrow 2a - 3 > 0 \rightarrow a > \frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر از سه مجموعه فوق اشتراک بگیریم مجموعه جواب \emptyset است.

۶۷- گزینه‌ی ۴

شرط این که معادله دارای دو ریشه منفی باشد این است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(m+2)(m-1) > 0 \rightarrow -m^2 - m + 6 > 0 \rightarrow -3 < m < 2 \\ P > 0 \rightarrow \frac{m-1}{m+2} > 0 \rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1 \\ S < 0 \rightarrow \frac{-4}{m+2} < 0 \rightarrow m > -2 \end{cases}$$

اشتراک از سه مجموعه‌ی فوق، جواب به صورت $1 < m < 2$ است.

۶۸- گزینه‌ی ۳

$$6\left(\frac{2}{4}\right)^x - 13\left(\frac{2}{6}\right)^x + 6\left(\frac{2}{9}\right)^x = 0 \xrightarrow{\div \left(\frac{2}{9}\right)^x} 6\left(\frac{4}{9}\right)^x - 13\left(\frac{6}{9}\right)^x + 6 = 0$$

$$\rightarrow 6\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{x}} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 6 = 0 \rightarrow 6\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}\right)^2 - 13\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 6 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = A \rightarrow 6A^2 - 13A + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ A = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{x} = 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{x} = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \text{حاصل ضرب} = (2)(-2) = -4$$

گزینه ۲

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ باشند:

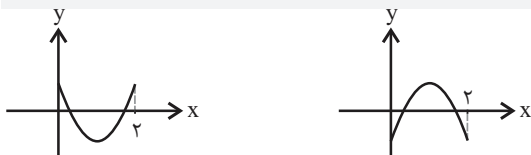
$$2x^2 - mx + m - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{m}{2} \\ \alpha\beta = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \xrightarrow{\times 4}$$

$$m^2 - 4m + 4 = 16 \rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}$$

به ازای $m = 6$ معادله $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ریشه حقیقی ندارد پس $m = -2$ است.

گزینه ۲



در هر دو حالت بالا $f(0)f(2) > 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} f(0) = (m+2)(0)^2 - 4(0) + (m+2) = m+2 \\ f(2) = (m+2)(2)^2 - 4(2) + (m+2) = 5m+2 \end{cases} \rightarrow (m+2)(5m+2) > 0 \rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -\frac{2}{5} \quad (1)$$

از طرفی معادله دو ریشه دارد پس $\Delta > 0$ است بنابراین:

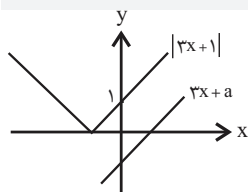
$$\Delta = 16 - 4(m+2)^2 > 0 \rightarrow (m+2)^2 < 4 \rightarrow -4 < m < 0 \quad (2)$$

از طرفی رأس سهمی باید در بازه $(0, 2)$ باشد پس:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(m+2)} = \frac{2}{m+2} \rightarrow 0 < \frac{2}{m+2} < 2 \rightarrow m > -1 \quad (3)$$

حال اگر از (۱)، (۲) و (۳) اشتراک بگیریم داریم: $-\frac{2}{5} < m < 0$

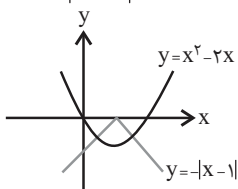
گزینه ۱



اگر $a < 1$ باشد در این صورت نمودار $|3x+1|$ را قطع نمی‌کند.

۷۲- گزینه‌ی ۳

$$x^2 + |x-1| = 2x \rightarrow x^2 - 2x = -|x-1|$$



با توجه به نمودارهای رسم شده معادله داده شده ۲ جواب دارد.

پاسخنامه تست‌های درس سوم (معادلات گویا و گنگ)

۷۳- گزینه‌ی ۲

$$x^2 + 4x + 3 = a \rightarrow a = \sqrt{a+2} \rightarrow a^2 = a+2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -1 & \text{غ‌ق} \\ a = 2 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

۷۴- گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} 11 \times \frac{40}{100} = 4/4 \\ 4 \times \frac{70}{100} = 2/8 \end{cases} \rightarrow 4/4 + 2/8 = 7/2 \text{ میزان کل رنگ}$$

فرض کنیم با تبخیر X کیلوگرم غلظت محلول به ۵۰٪ می‌رسد پس داریم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \rightarrow 15-x = 14/4 \rightarrow x = 0/6$$

۷۵- گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه عبارت را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3x+7 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{7}{3} \\ 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+10 \geq 0 \rightarrow x \geq -5 \\ x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

 تنها عدد $x = 3$ در دامنه عبارت قرار دارد که در معادله صدق می‌کند پس معادله یک جواب دارد.

۷۶- گزینه‌ی ۱

$$\begin{cases} |x-2| \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \\ 1 \geq 1 \end{cases} \rightarrow |x-2| + \sqrt{x-1} + 1 \geq 1 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

۷۷- گزینه‌ی ۲

$$(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \rightarrow x = 2 \\ 9-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{غ‌ق} \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

معادله دارای دو ریشه است.

۷۸- گزینه‌ی ۴

ابتدا شرط دامنه را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} 3x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \\ \sqrt{x-3}-3 \geq 0 \rightarrow \sqrt{x-3} \geq 3 \rightarrow x-3 \geq 9 \rightarrow x \geq 12 \end{cases}$$

پس دامنه‌ی عبارت به صورت $x \geq 12$ است پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+3} &= \sqrt{x-3}-3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 3x+3 = x-3+9-6\sqrt{x-3} \\ \rightarrow 2x-3 &= -6\sqrt{x-3} \quad (1) \end{aligned}$$

با توجه به شرط دامنه داریم:

$$\begin{cases} x \geq 12 \rightarrow 2x \geq 24 \rightarrow 2x-3 \geq 21 \\ x \geq 12 \rightarrow x-3 \geq 9 \rightarrow \sqrt{x-3} \geq 3 \xrightarrow{\times(-6)} -6\sqrt{x-3} \leq -18 \end{cases}$$

سمت چپ تساوی (۱) از ۲۱ بزرگتر یا مساوی است و سمت راست آن از ۱۸ کوچکتر یا مساوی است پس معادله جواب ندارد.

۷۹- گزینه‌ی ۴

دو عبارت رادیکالی داده شده نامنفی‌اند و مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است. پس هر یک از آنها برابر صفر می‌باشد.

$$\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 = 0 \\ 2x^2 + 4x - ax - 2a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ یا } x = \frac{1}{3} \\ (x+2)(2x-a) = 0 \rightarrow x = -2 \text{ یا } x = \frac{a}{2} \end{cases}$$

معادله وقتی جواب دارد که دو معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی مشترک باشند پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4 \\ \text{یا} \\ \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۸۰- گزینه‌ی ۳

اگر $x^2 - 2x = A$ بگیریم آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{A} + \frac{2}{A-3} = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{A-3+2A}{A(A-3)} = -\frac{3}{2} \rightarrow 3A^2 - 9A = -6A + 6$$

$$\rightarrow 3A^2 - 3A - 6 = 0 \xrightarrow{\div 3} A^2 - A - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 4 - 2 = 2 \\ x^2 - 2x = 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x_1'^2 + x_2'^2 = S'^2 - 2P' = 4 + 4 = 8 \end{cases}$$

پس مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۱۰ است.

۸۱- گزینه‌ی ۳

ابتدا دامنه عبارت را به دست می‌آوریم:

$$-x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \rightarrow -(x^3(x-4) - 25(x-4)) \geq 0 \rightarrow -(x-4)(x^2 - 25) \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} (-\infty, -5] \cup [4, 5]$$

$$-x^2 + 6x - 8 = -(x-2)(x-4) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} [2, 4]$$

تنها عددی که در اشتراک دو محدوده‌ی بالا قرار دارد $x = 4$ است که در معادله صدق می‌کند پس معادله فقط یک جواب دارد.

۸۲- گزینه‌ی ۱

$$x^2 - 4x + \sqrt{x} + 2 = 0 \rightarrow x(x-4) + (\sqrt{x} + 2) = 0 \rightarrow x(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) + (\sqrt{x} + 2) = 0$$

$$\rightarrow (\sqrt{x} + 2)(x\sqrt{x} - 2x + 1) = 0$$

می‌دانیم $\sqrt{x} + 2 \neq 0$ است پس $x\sqrt{x} - 2x + 1 = 0$ است.

$$t = \sqrt{x} \rightarrow t^3 - 2t^2 + 1 = 0 \rightarrow (t-1)(t^2 - t - 1) = 0$$

معادله‌ی $t - 1 = 0$ دارای یک ریشه و معادله‌ی $t^2 - t - 1 = 0$ دارای دو ریشه است که یکی از ریشه‌ها منفی است که غیرقابل قبول است پس معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه است.

۸۳- گزینه‌ی ۴

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2} + \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x^2 + x + x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{2} \rightarrow 4x^2 + 2x - 8 = x^2 - x - 2$$

$$\rightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ غرق}$$

۸۴- گزینه‌ی ۱

$$x^2 - 2x - 2 = y \rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{y-3} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{y-3-y}{y^2-3y} = \frac{3}{2} \rightarrow 3y^2 - 9y = -6$$

$$\rightarrow 3y^2 - 9y + 6 = 0 \xrightarrow{\div 3} y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3 \\ x^2 - 2x - 2 = 2 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 = 2 \\ x'_1 x'_2 = -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + (x'_1{}^2 + x'_2{}^2) = (-1)^2 + (3)^2 + ((x'_1 + x'_2)^2 - 2x'_1 x'_2) = 1 + 9 + (2^2 - 2(-4)) = 22$$

۸۵- گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی عبارت را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \\ 1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq x \leq 1$$

تنها عدد صحیح در محدوده‌ی فوق که در معادله صدق می‌کند $x = -1$ است.

۸۶- گزینه‌ی ۴

$$1 + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 1 + 1 + x^2 + 2\sqrt{1+x^2} = 1 + x$$

$$\rightarrow 2\sqrt{1+x^2} = -x^2 + x - 1$$

سمت راست تساوی همواره منفی ($\Delta < 0$) و ضریب x^2 منفی است) و سمت چپ تساوی همواره مثبت است پس معادله جواب ندارد.

۸۷- گزینه‌ی ۲

$$\sqrt{x^2 - 4} + 4 = x(4 - x) \rightarrow \sqrt{x^2 - 4} + x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 4} + (x - 2)^2 = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر باشد باید هم‌زمان هر دوی آنها صفر باشند.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \\ (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 2$$

۸۸- گزینه‌ی ۲

$$\frac{2a}{x - x^2} + \frac{1}{x - 1} = 1 \rightarrow \frac{2a}{x(1 - x)} + \frac{1}{-(1 - x)} = 1 \rightarrow \frac{2a - x}{x(1 - x)} = 1 \rightarrow$$

$$2a - x = x - x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 2a = 0$$

$$\Delta = 4 - 8a = 0 \rightarrow 8a = 4 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

چون معادله ریشه مضاعف دارد پس دلتای عبارت صفر است.

۸۹- گزینه‌ی ۲

$$x(\sqrt{x + 2} - x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x + 2} - x = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x + 2} - x = 0 \rightarrow \sqrt{x + 2} = x \xrightarrow{x \geq 0} x + 2 = x^2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \text{ غقی} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب دارد.

۹۰- گزینه‌ی ۴

$$x = -1 \rightarrow -2 - \sqrt{-3 - a} = -4 \rightarrow \sqrt{-3 - a} = 2 \xrightarrow{\text{بیتوان}} -3 - a = 4 \rightarrow a = -7$$

$$\text{معادله: } 2x + 4 = \sqrt{3x + 7} \rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 3x + 7 \rightarrow 4x^2 + 13x + 9 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{9}{4} \text{ غقی} \end{cases}$$

۹۱- گزینه‌ی ۳

$$\frac{t - 1}{2x} = \frac{x + 1}{x^2 - 2x} \rightarrow (t - 1)x(x - 2) = 2x(x + 1) \xrightarrow{x \neq 0}$$

$$(t - 1)(x - 2) = 2(x + 1) \rightarrow (t - 1)x - 2(t - 1) = 2x + 2 \rightarrow x = \frac{2t}{t - 3}$$

برای این که معادله جواب نداشته باشد باید x بدست آمده در تساوی فوق مخرج یکی از کسرهای معادله داده شده را صفر کند. پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{2t}{t - 3} = 0 \rightarrow t = 0 \\ \frac{2t}{t - 3} = 2 \rightarrow 2t = 2t - 6 \rightarrow 0 = -6 \end{cases}$$

برقرار نیست -۶ = ۰

از طرفی اگر $t = 3$ باشد مخرج $\frac{2t}{t - 3}$ نیز برابر صفر است. پس به ازای $t = 0$ یا $t = 3$ معادله جواب ندارد.

۹۲- گزینه‌ی ۱

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{بیتوان}} x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x^2 - x} = 2$$

$$\rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - x} = 2 \rightarrow \sqrt{x^2 - x} = 1 - x \xrightarrow{\text{طرفین بیتوان}} x^2 - x = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x = 1$$

پاسخنامه تست‌های درس چهارم (قدر مطلق و ویژگی‌های آن)

۹۳- گزینه‌ی ۱

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + ax + b = |x + 1| - |2x + 1| + ax + b$$

$$\xrightarrow{-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}} y = x + 1 + 2x + 1 + ax + b = (3 + a)x + (b + 2) = 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3 + a = 0 \rightarrow a = -3 \\ b + 2 = 3 \rightarrow b = 1 \end{cases} \rightarrow a - b = -4$$

۹۴- گزینه‌ی ۲

$$||x^2 - 13| - 10| = 2 \rightarrow \begin{cases} |x^2 - 13| - 10 = 2 \rightarrow |x^2 - 13| = 12 \\ |x^2 - 13| - 10 = -2 \rightarrow |x^2 - 13| = 8 \end{cases}$$

$$|x^2 - 13| = 12 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 13 = 12 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \\ x^2 - 13 = -12 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$|x^2 - 13| = 8 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 13 = 8 \rightarrow x^2 = 21 \rightarrow x = \pm\sqrt{21} \\ x^2 - 13 = -8 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

۹۵- گزینه‌ی ۴

۹۶- گزینه‌ی ۳

$$|x + 3| = 3|x| + 1$$

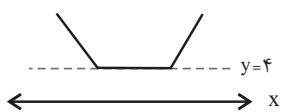
الف) $x \geq 0 \rightarrow x + 3 = 3x + 1 \rightarrow x = 1$

ب) $-3 \leq x < 0 \rightarrow x + 3 = -3x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

ج) $x < -3 \rightarrow -x - 3 = -3x + 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$ غیرقابل قبول است زیرا جواب بدست آمده در محدوده قرار ندارد

۹۷- گزینه‌ی ۲

$$|2x - 2| + 2|x + 3| = m \rightarrow |x - 1| + |x + 3| = \frac{m}{2}$$



اگر نمودار $|x - 1| + |x + 3|$ را رسم کنیم کمترین مقدار برابر ۴ است پس زمانی معادله ریشه دارد که

$$\frac{m}{2} < 4 \text{ باشد پس } m < 8 \text{ است.}$$

۹۸- گزینه‌ی ۱

اگر $x < 0$: $x^2 + 2x - 6 - 3x = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$ غرق

اگر $x \geq 0$: $x^2 + 2x - 6 + 3x = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$ غرق

مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ می‌باشد.

۹۹- گزینه‌ی ۲

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

دامنه‌ی عبارت برابر است با:

پس با توجه به دامنه‌ی عبارت $|x+1| = x+1$ می‌باشد پس داریم:

$$x+1+\sqrt{x-1} = 3x+2 \rightarrow \sqrt{x-1} = 2x+1 \xrightarrow{\text{بم توان ۲}}$$

$$x-1 = 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

چون Δ معادله‌ی درجه دوم فوق منفی است. پس معادله جواب ندارد.

۱۰۰- گزینه‌ی ۳

$$\text{اگر } x \geq 0: ax+x=1 \rightarrow x = \frac{1}{a+1} \xrightarrow{x > 0} \frac{1}{a+1} > 0 \rightarrow a > -1$$

$$\text{اگر } x < 0: ax-x=1 \rightarrow x = \frac{1}{a-1} \xrightarrow{x < 0} \frac{1}{a-1} < 0 \rightarrow a < 1$$

چون می‌خواهیم معادله دو جواب داشته باشد پس a در هر دو شرط صدق کند پس $-1 < a < 1$ و یا به عبارتی $|a| < 1$ است.

۱۰۱- گزینه‌ی ۳

با توجه به نامعادله $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| < a$ باید $a > 0$ باشد پس داریم:

$$\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| < a \rightarrow |2x+1| < a|x-1| \rightarrow |2x+1| < |ax-a| \xrightarrow{\text{بم توان ۲}}$$

$$(2x+1)^2 < (ax-a)^2 \rightarrow (2x+1)^2 - (ax-a)^2 < 0 \rightarrow ((2x+1)-(ax-a))((2x+1)+(ax-a)) < 0$$

$$((2-a)x + (1+a))((2+a)x + (1-a)) < 0 \quad (1)$$

برای آن که جواب نامعادله $(-\infty, b)$ باشد باید عبارت (۱) نامعادله درجه‌ی اول باشد پس یا $2-a=0$ و یا $2+a=0$ است. چون $a > 0$ است

$a=2$ می‌باشد پس نامعادله‌ی (۱) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$3(4x-1) < 0 \rightarrow x < \frac{1}{4} \rightarrow b = \frac{1}{4} \rightarrow a+b = \frac{9}{4}$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۴

$$2x - |x-2| > x^2 \rightarrow \begin{cases} 2x - (x-2) > x^2 & x \geq 2 \\ 2x + (x-2) > x^2 & x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 & x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 & x < 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{cases} -1 < x < 2, & x \geq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{جواب ندارد} \\ 1 < x < 2, & x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < 2 \end{cases}$$

پس نقطه میانی بازه $\frac{3}{2}$ است.

۱۰۳- گزینه‌ی ۴

$$|2x-1| + |2x+6| \geq |2x-1-2x-6| = |-7| = 7$$

می‌دانیم $|a| + |b| \geq |a \pm b|$ پس داریم:

۱۰۴- گزینه‌ی ۴

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5 \rightarrow |2x+3| + 2|x-2| = 5$$

$$\rightarrow |2x+3| + |2x-4| = 5$$

از طرفی $|2x+3| + |2x-4| \geq |2x+3-2x+4| = 7$ پس این معادله جواب ندارد.

۱۰۵- گزینه ۳

نمودار تابع نسبت به محور y ها قرینه است، از طرفی علامت y همواره مثبت است پس ضابطه $y = ||x| - 2|$ است.

۱۰۶- گزینه ۴

$$\begin{cases} x < -2 \rightarrow y = -2x - 4 + 3 - 3x + x = -4x - 1 \\ -2 \leq x \leq 1 \rightarrow y = 2x + 4 + 3 - 3x + x = 7 \\ x > 1 \rightarrow y = 2x + 4 - 3 + 3x + x = 6x + 1 \end{cases}$$

بنابراین در بازه $[-2, 1]$ تابع ثابت است.

۱۰۷- گزینه ۳

$$\frac{4x-8}{|x-2|} = x \rightarrow \frac{4(x-2)}{|x-2|} = x \rightarrow \begin{cases} x > 2 \rightarrow x = 4 \\ x < 2 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

۱۰۸- گزینه ۴

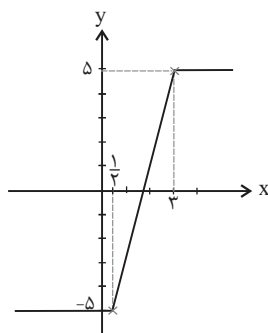
$$y = 0 \rightarrow -|x-4| + 1 = 0 \rightarrow |x-4| = 1 \rightarrow \begin{cases} x-4 = 1 \rightarrow x = 5 \\ x-4 = -1 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

۱۰۹- گزینه ۴

$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \rightarrow -3(x-2) + (x-1) = k \rightarrow -2x + 5 = k \rightarrow x = \frac{5-k}{2} \\ 1 < \frac{5-k}{2} < 2 \xrightarrow{\times 2} 2 < 5-k < 4 \rightarrow -4 < k-5 < -2 \xrightarrow{+5} 1 < k < 3 \end{aligned}$$

۱۱۰- گزینه ۱

$$y = |2x-1| - 2|x-3|$$



با توجه به نمودار رسم شده بیشترین مقدار تابع ۵ است.

۱۱۱- گزینه ۴

با توجه به نکته $ab \geq 0 \Leftrightarrow |a| + |b| = |a+b|$ داریم: $|2x| + |10-x| = |x+10| \rightarrow 2x(10-x) \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 10$
بنابراین جواب‌های صحیح معادله اعداد ۰ تا ۱۰ است که مجموعشان برابر ۵۵ است.
مجموع اعداد صحیح در محدوده‌ی فوق برابر ۵۵ است.

۱۱۲- گزینه ۱

$$\begin{aligned} x < 0 \rightarrow y = -2x + 2 - x = -3x + 2 \\ 0 \leq x < 1 \rightarrow y = -2x + 2 + x = -x + 2 \\ x \geq 1 \rightarrow y = 2x - 2 + x = 3x - 2 \end{aligned}$$

بنابراین خط $y = -x + 2$ بر نمودار تابع در بازه $[0, 1)$ منطبق است.

۱۱۳- گزینه‌ی ۴

$$|x-1|-2=1 \rightarrow \begin{cases} |x-1|-2=1 \rightarrow |x-1|=3 \rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases} \\ |x-1|-2=-1 \rightarrow |x-1|=1 \rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow x=2 \\ x-1=-1 \rightarrow x=0 \end{cases} \end{cases}$$

۱۱۴- گزینه‌ی ۱

ریشه‌ی عبارت داخل قدر مطلق طول رأس می‌باشد.

$$1+bx=0 \rightarrow x=-\frac{1}{b} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} b=-2$$

از طرفی نمودار از نقطه‌ی $(0, -2)$ نیز عبور می‌کند پس داریم:

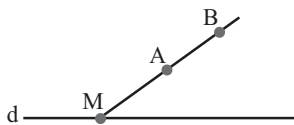
$$y=1+a|x-2x| \xrightarrow{(0,-2)} -2=1+a|1| \rightarrow a+1=-2 \rightarrow a=-3$$

پس $a+b=-5$ می‌باشد.

پاسخنامه تست‌های درس پنجم (آشنایی با هندسه تحلیلی)

۱۱۵- گزینه‌ی ۲

کافی است نقطه‌ی تقاطع خط d با امتداد خط AB را بیابیم.



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{4-2} = 2 \rightarrow \text{معادله‌ی خط } AB: y=2x-1$$

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ d: y=x-1 \end{cases} \rightarrow 2x-1=x-1 \rightarrow x=0$$

۱۱۶- گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} 3y+4x=8 \\ 2y-3x=11 \end{cases} \rightarrow x=-1, y=4 \rightarrow B(-1, 4)$$

نقطه‌ی A رأس مقابل به رأس B می‌باشد پس وسط پاره‌ی خط AB وسط قطر است.

$$M = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+6}{2} \right) = (3, 5)$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۳

دو خط داده شده با هم موازیند پس فاصله‌ی بین دو خط طول ضلع مربع است.

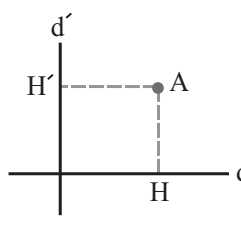
$$\begin{cases} 2x-2y=3 \rightarrow x-y-\frac{3}{2}=0 \\ y=x+1 \rightarrow x-y+1=0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left| -\frac{3}{2} - 1 \right|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{5}{2} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{25}{8}$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۲

چون شیب دو خط داده شده عکس قرینه یکدیگرند پس معادله‌ی دو ضلع مجاور عمود بر هم داده شده است رأس A روی هیچ یک از این خطوط قرار ندارند پس برای پیدا کردن طول و عرض مستطیل فاصله‌ی نقطه‌ی A را از هر یک از خطوط بدست آوریم:



$$x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AH' = \frac{|1(1) + 2(2) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2x - y - 7 = 0 \rightarrow AH = \frac{|2(2) + 1(-1) - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{5-2}{2-0} = \frac{3}{2} \\ m_{BC} = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ در رأس } C \text{ قائمه است}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$S = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۴

فاصله‌ی نقطه‌ی A از ضلع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است.

$$\begin{cases} A(3, -1) \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|3(1) - 1(-2) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{ضلع مربع} = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} \rightarrow S = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

۱۲۱- گزینه‌ی ۳

$$(1, 2) \text{ و } (-1, 3) \rightarrow m = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{معادله‌ی خط: } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

حال محل تلاقی خط را با محورهای مختصات بدست می‌آوریم:

$$x = 0 \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(0 - 1) \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow A\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$y = 0 \rightarrow 0 - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0)$$

مختصات M وسط AB برابر است با $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

$$OM = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۲

رأس A محل برخورد دو خط AB و AC است.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \longrightarrow x=1, y=1 \rightarrow A(1,1)$$

$$\begin{cases} A(1,1) \\ BC: x+y-4=0 \end{cases} \longrightarrow AH = \frac{|1(1)+1(1)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۱-۱۲۳ گزینه‌ی ۱

خط موازی با $y = \sqrt{3}x - 1$ که از مبدأ می‌گذرد به صورت $y = \sqrt{3}x$ است که فاصله‌ی این دو خط برابر است با:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

۳-۱۲۴ گزینه‌ی ۳

$$C, B \text{ وسط } M \rightarrow M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (1, -1)$$

$$\begin{cases} A(-2, 3) \\ M(1, -1) \end{cases} \longrightarrow AM = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۳-۱۲۵ گزینه‌ی ۳

دو خط داده شده با هم موازیند پس طول ضلع مربع برابر با فاصله‌ی این دو خط است:

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{5}y = 3 \\ 5y + 2\sqrt{5}x = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{5}y - 3 = 0 \xrightarrow{\times\sqrt{5}} 2\sqrt{5}x + 5y - 3\sqrt{5} = 0 \\ 2\sqrt{5}x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-3\sqrt{5}-0|}{\sqrt{(2\sqrt{5})^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 1 \quad \text{طول ضلع مربع}$$

$$\text{محیط مربع} = 4 \times 1 = 4$$

۳-۱۲۶ گزینه‌ی ۳

نقطه‌ی $A(-3, -3)$ روی این دو ضلع نیست پس اول محل برخورد این دو ضلع را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2y-3x+5=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ -3x+2y=-5 \end{cases} \longrightarrow x=1, y=-1 \longrightarrow C(1, -1)$$

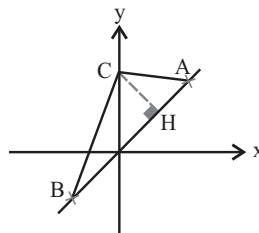
$$M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = (-1, -2) \rightarrow Mo = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \quad \text{نقطه } M \text{ محل برخورد قطرهای وسط } AC \text{ قرار دارد.}$$

۱-۱۲۷ گزینه‌ی ۱

مختصات هر نقطه روی نیمساز اول و سوم به صورت (x, x) است پس داریم:

$$\frac{|x+2x|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5} \rightarrow \frac{3|x|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \rightarrow |x| = \frac{10}{3} \rightarrow x = \pm \frac{10}{3}$$

$$A\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \quad B\left(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right) \quad C(0, 3)$$



حال فاصله‌ی C را از خط AB بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} C(0, 3) \\ AB: y=x \end{cases} \longrightarrow CH = \frac{|3-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$S = \frac{CH \times AB}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}\sqrt{2}}{2} = 1.$$

۱۲۸ - گزینه ۲

$$m_{AB} = \frac{-3-1}{0-2} = +2$$

پس معادله‌ی خطی که عمود بر خط AB است و از مبدأ می‌گذرد به صورت $y = -\frac{1}{2}x$ می‌باشد و محل برخورد این خط با خط $x = 4$ برابر است با:

$$y = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{x=4} y = -2$$

۱۲۹ - گزینه ۲

فرض کنید نقطه‌ی A روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد پس می‌توان مختصات آن را به صورت $A(x, 2x + 1)$ در نظر گرفت فاصله‌ی این نقطه تا نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{|x(1) + (2x+1)(-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-x-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+1|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 4\sqrt{2}$$

$$\longrightarrow |x+1| = 8 \rightarrow \begin{cases} x+1 = 8 \\ x+1 = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -9 \end{cases}$$

۱۳۰ - گزینه ۴

فاصله‌ی مرکز مربع تا اضلاع مربع برابر با نصف طول ضلع مربع است.

$$AH = \frac{|4(1) - 3(4) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{5} \rightarrow \text{طول ضلع مربع} = \frac{18}{5}$$

$$\text{مساحت} = \left(\frac{18}{5}\right)^2 = 12\frac{12}{25}$$

۱۳۱ - گزینه ۳

$$m_{AB} = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{CH \perp AB} m_{CH} = 2 \rightarrow CH \quad \text{معادله خط: } y - 4 = 2(x + 1)$$

$$x = 0 \rightarrow y - 4 = 2(0 + 1) \rightarrow y = 6$$

محل تلاقی خط CH با محور y ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

۱۳۲ - گزینه ۲

$$M\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (0, 4)$$

M وسط BC است پس داریم:

$$AM = \sqrt{(2-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

۱۳۳ - گزینه ۱

دو خط داده شده با هم موازیند پس طول ضلع مربع برابر با فاصله‌ی دو خط است، بنابراین:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow d = \frac{|-2-1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{طول ضلع مربع}} \text{طول قطر} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) = 3$$

۱۳۴ - گزینه‌ی ۱

 ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی A را از خط $3y - 4x - a = 0$ بدست می‌آوریم:

$$d = \frac{|3(2) - 4(-1) - a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10 - a|}{\sqrt{25}} = \frac{|10 - a|}{5} \quad d=2 \rightarrow \frac{|10 - a|}{5} = 2$$

$$\rightarrow |10 - a| = 10 \rightarrow \begin{cases} 10 - a = 10 \rightarrow a = 0 \\ 10 - a = -10 \rightarrow a = 20 \end{cases}$$

مجموع مقادیر برای a برابر ۲۰ است.

۱۳۵ - گزینه‌ی ۲

 دو خط $y_1 = ax + b$ و $y_2 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ نسبت به خط $y = 2$ متقارنند پس به ازای هر مقدار x داریم $\frac{y_1 + y_2}{2} = 2$ لذا $y_1 + y_2 = 4$ است:

$$(ax + b) + \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 4 \rightarrow \left(a + \frac{4}{3}\right)x + \left(b + \frac{2}{3}\right) = 4 \rightarrow$$

$$\begin{cases} a + \frac{4}{3} = 0 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \\ b + \frac{2}{3} = 4 \rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \end{cases} \rightarrow ab = \frac{-40}{9}$$

۱۳۶ - گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} 2y - 3x = 12 \\ 3y + x = 7 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 3 \rightarrow B(-2, 3)$$

نقطه‌ی A رأس مقابل به B است و محل تلاقی قطرها وسط AB است پس:

$$M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (2, 2)$$

۱۳۷ - گزینه‌ی ۲

$$mx + (2m - 1)y + 3m = 1 \rightarrow m(x + 2y + 3) - y - 1 = 0$$

دسته خطوط فوق از نقطه‌ی ثابت A می‌گذرد پس باید ضریب m ضریب عددی برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \xrightarrow{y=-1} x - 2 + 3 = 0 \rightarrow x = -1 \\ -y - 1 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \rightarrow A(-1, -1)$$

 حال فاصله‌ی نقطه‌ی A(1, -1) را از خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم) بدست می‌آوریم:

$$d = \frac{|(-1)(1) + (-1)(-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا شود}} d = \sqrt{2}$$

۱۳۸ - گزینه‌ی ۳

 نقطه M را به صورت $M(x, 2x - 1)$ در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$MA = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{5x^2 - 8x + 5}$$

$$MB = \sqrt{(x-0)^2 + (2x-1-1)^2} = \sqrt{5x^2 - 4x + 4}$$

$$MA + MB = 3 \rightarrow \sqrt{5x^2 - 4x + 5} + \sqrt{5x^2 - 4x + 4} = 3 \rightarrow$$

$$\sqrt{5x^2 - 4x + 5} = 3 - \sqrt{5x^2 - 4x + 4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{5x^2} - \cancel{4x} + 5 = 9 + \cancel{5x^2} - \cancel{4x} + 4 - 6\sqrt{5x^2 - 4x + 4}$$

$$\rightarrow 6\sqrt{5x^2 - 4x + 4} = 8 \rightarrow 3\sqrt{5x^2 - 4x + 4} = 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$9(5x^2 - 4x + 4) = 16 \rightarrow 45x^2 - 36x + 36 = 16 \rightarrow$$

$$45x^2 - 36x + 20 = 0 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{0}{15} \pm \frac{2\sqrt{11}}{15}$$

۱۳۹ - گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} 3y + 2x = -4 \\ 2y + 3x = -1 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = -2 \rightarrow A(1, -2)$$

نقطه برخورد دو ضلع را پیدا می‌کنیم:

نقطه‌ی A رأس مقابل به C(۳, ۴) است پس مختصات مرکز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = (2, 1)$$

